MPSI

Programme de colle - semaine 13 du 05/01/2026 au 11/01/2026

1 Loi de composition interne, groupe

- Définition d'une loi de composition interne (lci) sur un ensemble E.
  On s'appuiera surtout sur les exemples de lci déjà connues. Ne pas abuser des lois artificielles.
- Associativité, commutativité, élément neutre, élément inversible, partie stable par une lci, distributivité d'une lci par rapport à une autre.
- Structure de groupe : définition, groupe abélien (commutatif), itérées (puissances) d'un élément.
- Sous-groupe. G et $\{e\}$ sont des sous-groupes.
- Exemples de groupes à connaître : groupes additifs $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
  Groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
  Groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ (ensemble des bijections de E dans E).
  $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$ (*).
- Morphisme de groupes : définition. Propriétés élémentaires : $f(e) = e'$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
  L'image directe/réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe (*).
  Image d'un morphisme : définition.
  Noyau d'un morphisme : définition, caractérisation de l'injectivité (*).

2 Limites de fonctions

- Sur les limites, seules ont été faites les démonstrations marquées d'un (*). Nous n'avons pas fait d'exercice spécifiquement sur la recherche de limites, mais la colle peut être l'occasion de faire des révisions sur les croissances comparées, équivalents, etc.
- Notion de propriété vraie au voisinage d'un point (pas d'exercice fait).
- Définition des différentes notions de limites, notamment limite finie en un point fini (avec le dessin qui va avec). Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point. Unicité de la limite.
- Composition de limites fonction $\circ$ fonction (*) ou fonction $\circ$ suite (pas démontré).
- Caractérisation séquentielle de la limite (*) (seul le sens intéressant a été démontré).
- Théorème d'encadrement / minoration. Théorème de la limite monotone.

3 Continuité

- Continuité en un point. Continuité à gauche, à droite.
- Aucun exercice fait. Le seul type d'exercice qui peut être posé est “Telle fonction est-elle continue en tel point ?” (ou “donner l'ensemble des points où telle fonction est continue”).

4 Exercices

1. Exercice du type :
   - Montrer que ... est un sous-groupe de ...
   - ... est-il un sous-groupe de ... ?
   - Montrer que $f\,:\,\cdots\longmapsto\cdots$ est un morphisme de groupes, donner son image et son noyau.
   - $f\,:\,\cdots\longmapsto\cdots$ est-elle un morphisme de groupes ?

2. **Sous-groupes** (Déjà fait, prendre des exemples légèrement différents).
   Montrer que l'ensemble est un sous-groupe du groupe considéré.

   a) $E=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(M)=0\}$: sous-groupe de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+\big)$ (tr : trace).

   b) $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \dfrac{1}{a}\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\right\}$: sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\times)$.

   c) E : ensemble des fonctions affines, sous-groupe de $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+)$.

   d) F : ensemble des fonctions affines non constantes, sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}),\circ)$.
   $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. **Sous-groupes de** $(\mathbb{Z},+)$

   a) Si $m\in\mathbb{N}$, l'ensemble $\{mk\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$ est noté $m\mathbb{Z}$.
   Montrer que $m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

   b) Inversement, soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ non réduit à $\{0\}$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $H=m\mathbb{Z}$.

      i) Montrer qu'il existe dans H un élément strictement positif.

      ii) Montrer que $H\cap\mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément. Il est noté m.

      iii) Montrer que $\forall x\in H,\ m|x$.
      Indication : effectuer la division euclidienne de x par m.

      iv) Montrer que $H=m\mathbb{Z}$ (procéder par double inclusion).