MPSI

Programme de colle - semaine 14 du 12/01/2026 au 18/01/2026

1 Continuité

- Continuité en un point, à gauche, à droite. Prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle, notation $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Conservation de la continuité par opérations/composition.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Théorème des valeurs intermédiaires, différents énoncés (pas de démonstration, mais savoir expliquer la méthode de dichotomie)
- Fonction continue sur un segment : l'image est un segment ; traduction : la fonction est bornée et atteint ses bornes (pas de démonstration).
- Toute fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone (pas de démonstration).
- Théorème de la bijection (pas de démonstration).

2 Structures d'anneau et de corps

- Structure d'anneau : définition (selon le programme, tout anneau est unitaire), règles de calcul (en particulier, identités remarquables pour deux éléments qui commutent), anneau intègre, groupe des inversibles.
- Exemples d'anneaux à connaître : $\mathbb{Z}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ensemble des fonctions de I (partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, ensemble des suites réelles.
- Structure de corps (selon le programme, tout corps est commutatif). Tout corps est intègre. Exemples de corps à connaître : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Morphisme d'anneau, sous-anneau. La notion d'idéal n'est pas au programme en sup.

3 Le corps des réels et nombres particuliers

- Nombres décimaux. Approximations décimales d'un réel à 10^{-n} près.
  $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ (ce n'est pas un corps).
  Savoir exprimer une approximation décimale par défaut, par excès, à l'aide de la partie entière.
- Nombres rationnels et irrationnels. Entiers premiers entre eux (notion introduite uniquement pour définir la forme irréductible d'un rationnel).
  $\sqrt{2}$ est irrationnel (*).
- Partie dense dans $\mathbb{R}$. La définition officielle est "une partie est dense ssi elle rencontre tout ouvert non vide". J'ai également donné la caractérisation :
  "A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists a \in A \,/\, x < a < y$".
  Mais en pratique on n'utilise aucune des deux.
  Caractérisation séquentielle de la densité (*) : A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.
  $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (*).
- **Pas encore vu :** Caractérisation séquentielle de la borne supérieure : soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.
  -Si E est majorée, alors il existe une suite d'éléments de E qui converge vers $\sup(E)$.
  -Si E n'est majorée, alors il existe une suite d'éléments de E qui tend vers $+\infty$.

4 Exercices

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t$.
   Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Montrer que toute fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue admet un point fixe.

3. Montrer qu'un ensemble donné est un sous-anneau de ....
   Exemple fait : $\mathbb{Z}[i]$.

4. Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   Montrer que si $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
   Pour gagner du temps, on pourra admettre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.
   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
   c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x$.