MPSI

Programme de colle - semaine 16 du 26/01/2026 au 01/02/2026

1 Convexité

Définitions et propriétés à illustrer par des dessins. Ça doit rester très simple (dire quelle propriété appliquer, et à quelle fonction). **Aucune démonstration.**

- Fonction convexe / concave sur un intervalle I : définition par la position des cordes par rapport à la courbe (illustration + inégalité)
- Caractérisation par la croissance des pentes.
- Si f est dérivable : f est convexe ssi f' est croissante.
- Pour une fonction convexe, la courbe est au-dessus des tangentes.
- Inégalité de Jensen : si f est convexe, alors $\forall n \geqslant 2$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in I$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ de somme 1, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

2 Suites numériques

- Exercices sur les suites récurrentes, de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ (f : fonction d'une variable réelle).
- La seule propriété au programme : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.
- Les exercices doivent être guidés.

3 Polynômes

- **Aucun exercice fait, que des questions de cours**
- Selon le programme, en MPSI, les polynômes sont à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Écriture $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ou $\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ (avec (a_k) presque nulle). Notation $\mathbb{K}[X]$. Opérations, coefficients de la somme, du produit. Identification des coefficients en cas d'égalité.
  La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'a pas été vue (la notion de polynôme n'a pas été définie formellement en tant qu'objet mathématique), ne pas demander de démonstration sur tous ces points. **Mais l'expression des coefficients du produit est à connaître.**
- Composition. Degré, propriétés. Degré de la somme, du produit. Notation $\mathbb{K}_n[X]$.
- Structure algébrique de $\mathbb{K}[X]$ (anneau intègre). Polynômes constants. Polynômes inversibles.
- Divisibilité, division euclidienne (démonstration non exigible).

4 Exercices

1. *Prototype d'exercice utilisant les principales techniques à connaître.*
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
   a) Montrer qu'elle est bien définie sur $\mathbb{N}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   c) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

2. *Prototype d'exercice utilisant l'inégalité des accroissements finis.*
   On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos u_n$.
   a) Montrer que la fonction cos a un unique point fixe $\alpha \in [0, 1]$.

b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}|u_n - \alpha|$

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. Que peut-on en déduire ?

3. **Inégalités obtenues à partir de la convexité** (questions indépendantes).

a) Comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n réels strictement positifs (utiliser la concavité de ln).

b) Soit p, q des réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+},\ xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

On pourra utiliser la concavité de ln.

c) Montrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$ et illustrer.