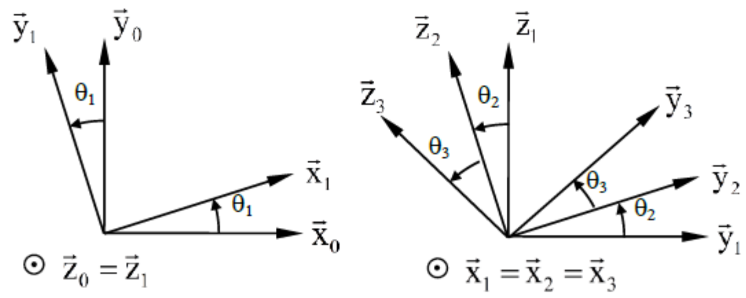
Problème 1 : Robot de soudage

Q1 :



Q2 :En cinématique du solide : $\overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = \overrightarrow{V(O_4 \in 4/3)} + \overrightarrow{V(O_4 \in 3/2)} + \overrightarrow{V(O_4 \in 2/1)} + \overrightarrow{V(O_4 \in 1/0)}$

$$= \frac{d}{dt/3}(\overrightarrow{O_3O_4}) + \overrightarrow{V(O_2 \in 3/2)} + \overrightarrow{O_4O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{V(O_1 \in 2/1)} + \overrightarrow{O_4O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{V(O_1 \in 1/0)} + \overrightarrow{O_4O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$
$$= \frac{d}{dt/3}(-L_3\overrightarrow{z_3}) + (L_3\overrightarrow{z_3} - L_2\overrightarrow{y_3}) \wedge \dot{\theta}_3\overrightarrow{x_{321}} + (L_3\overrightarrow{z_3} - L_2\overrightarrow{y_3} - L_1\overrightarrow{y_2}) \wedge \dot{\theta}_2\overrightarrow{x_{321}} + (L_3\overrightarrow{z_3} - L_2\overrightarrow{y_3} - L_1\overrightarrow{y_2}) \wedge \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}$$
$$= -\dot{L_3}\overrightarrow{z_3} + L_3\dot{\theta}_3\overrightarrow{y_3} + L_2\dot{\theta}_3\overrightarrow{z_3} + L_3\dot{\theta}_2\overrightarrow{y_3} + L_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_3} + L_1\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2} + L_3\,\dot{\theta}_1\overrightarrow{z_3} \wedge \overrightarrow{z_1} - L_2\,\dot{\theta}_1\overrightarrow{y_3} \wedge \overrightarrow{z_1} - L_1\,\dot{\theta}_1\overrightarrow{y_2} \wedge \overrightarrow{z_1}$$

Or

$\overrightarrow{z_1} = \cos(\theta_2 + \theta_3)\,\overrightarrow{z_3} + \sin(\theta_2 + \theta_3)\,\overrightarrow{y_3}$ *et* $\overrightarrow{z_1} = \cos\theta_2\,\overrightarrow{z_2} + \sin\theta_2\,\overrightarrow{y_2}$

D'où

$$\overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = -\dot{L_3}\overrightarrow{z_3} + L_3(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2)\overrightarrow{y_3} + L_2(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2)\overrightarrow{z_3} + L_1\dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2} - L_3\,\dot{\theta}_1\sin(\theta_2 + \theta_3)\,\overrightarrow{x_{321}}$$
$$- L_2\,\dot{\theta}_1\cos(\theta_2 + \theta_3)\,\overrightarrow{x_{321}} - L_1\,\dot{\theta}_1\cos\theta_2\,\overrightarrow{x_{321}}$$

Ce qui donne dans R_3 :

$$\overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = \left|\begin{matrix} -L_3\,\dot{\theta}_1\sin(\theta_2 + \theta_3) - L_2\,\dot{\theta}_1\cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1\,\dot{\theta}_1\cos\theta_2 \\ L_3(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + L_1\dot{\theta}_2\sin\theta_3 \\ -\dot{L_3} + L_2(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + L_1\dot{\theta}_2\cos\theta_3 \end{matrix}\right._{R3}$$

Q2 : En cinématique du point.

$$\overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = \frac{d}{dt/0}(\overrightarrow{O_0O_4}) = \frac{d}{dt/0}(\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4}) = \frac{d}{dt/0}(L_0\overrightarrow{z_0} + L_1\overrightarrow{y_2} + L_2\overrightarrow{y_3} - L_3\overrightarrow{z_3})$$
$$= L_1\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt/0} + L_2\frac{d\overrightarrow{y_3}}{dt/0} - \dot{L_3}\overrightarrow{z_3} - L_3\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt/0})$$

$$\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt/0} = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{y_2} = (\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}) \wedge \overrightarrow{y_2} = (\dot{\theta}_2\overrightarrow{x_{321}} + \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}) \wedge \overrightarrow{y_2} = \dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2} + \dot{\theta}_1(\cos\theta_2\,\overrightarrow{z_2} + \sin\theta_2\,\overrightarrow{y_2}) \wedge \overrightarrow{y_2}$$
$$= \dot{\theta}_2\overrightarrow{z_2} - \dot{\theta}_1\cos\theta_2\,\overrightarrow{x_3} = \dot{\theta}_2\,(\cos\theta_3\,\overrightarrow{z_3} + \sin\theta_3\,\overrightarrow{y_3}) - \dot{\theta}_1\cos\theta_2\,\overrightarrow{x_3}$$

$$\frac{d\overrightarrow{z_3}}{dt/0} = \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{z_3} = (\overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}) \wedge \overrightarrow{z_3} = ((\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\overrightarrow{x_{321}} + \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}) \wedge \overrightarrow{z_3} =$$
$$= -(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\overrightarrow{y_3} + \dot{\theta}_1(\cos(\theta_2 + \theta_3)\,\overrightarrow{z_3} + \sin(\theta_2 + \theta_3)\,\overrightarrow{y_3}) \wedge \overrightarrow{z_3} = -(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\overrightarrow{y_3} + \dot{\theta}_1\sin(\theta_2 + \theta_3)\,\overrightarrow{x_3}$$

$$\textit{D'où}\ \overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = \left|\begin{matrix} -L_3\,\dot{\theta}_1\sin(\theta_2 + \theta_3) - L_2\,\dot{\theta}_1\cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1\,\dot{\theta}_1\cos\theta_2 \\ L_3(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + L_1\dot{\theta}_2\sin\theta_3 \\ -\dot{L_3} + L_2(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + L_1\dot{\theta}_2\cos\theta_3 \end{matrix}\right._{R3}$$

Q3 : $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$ donc pas de changement d'orientation de 4/0. $\vec{V}(O_4 \in S_4/S_0) = V\overrightarrow{y_0}$ avec V = cste donc mouvement de translation rectiligne de direction $\overrightarrow{y_0}$.

Q4 : $\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \vec{0} = \overrightarrow{\Omega_{4/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} + \dot{\theta}_3\overrightarrow{x_{321}} + \dot{\theta}_2\overrightarrow{x_{321}} + \dot{\theta}_1\overrightarrow{z_1}$

D'où : $\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 = 0 \quad \Rightarrow \theta_2 + \theta_3 = \alpha = cste \quad et \quad \dot{\theta}_1 = 0$

Cela donne :

$$\overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = (L_1\dot{\theta}_2 \cos\theta_3 - \dot{L}_3)\overrightarrow{z_3} + L_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \overrightarrow{y_3}$$

Q5 : par projection dans R_0 :

$$V = -(L_1\dot{\theta}_2 \cos\theta_3 - \dot{L}_3)\sin\alpha + L_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \cos\alpha$$

$$0 = (L_1\dot{\theta}_2 \cos\theta_3 - \dot{L}_3)\cos\alpha + L_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \sin\alpha$$

Q6 : pour $\alpha = 0$, on a donc $V = L_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_3$ *d'où :*

$$V_{max} = L_1\dot{\theta}_{2\,max}$$

A.N. : $V_{max} = L_1\dot{\theta}_{2\,max} = 0.021\ m/s < 0.05 m/s$. *Le CDC est respecté.*

Problème 2 : houlogénératrice

Q1. $\overrightarrow{V_{A,1/0}} = \overrightarrow{V_{O,1/0}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} - d\vec{x_1} \wedge \dot{\alpha}\vec{z} = d\dot{\alpha}\vec{y_1}$

Q2. $\overrightarrow{V_{G,2/0}} = \overrightarrow{V_{A,2/0}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{V_{A,1/0}} - L\vec{x_2} \wedge (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\vec{z} = d\dot{\alpha}\vec{y_1} + L(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\vec{y_2}$

Q3. Expression du moment cinétique :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A,2/0} &= J\vec{\Omega} + m_2\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A,2/0}} = J(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\vec{z} + m_2L\vec{x_2} \wedge d\dot{\alpha}\vec{y_1} \\ &= \left[J(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + m_2dL\dot{\alpha}\cos\theta\right]\vec{z_0}\end{aligned}$$

Q4. Expression du moment dynamique :

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{A,2/0} &= \left.\frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + m_2\overrightarrow{V_{A,1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G,2/0}} \\ &= \left[J(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + m_2dL(\ddot{\alpha}\cos\theta - \dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\theta)\right]\vec{z_0} + m_2d\dot{\alpha}\vec{y_1} \wedge \left[d\dot{\alpha}\vec{y_1} + L(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\vec{y_2}\right] \\ &= \left[J(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + m_2dL(\ddot{\alpha}\cos\theta + \dot{\alpha}^2\sin\theta)\right]\vec{z_0}\end{aligned}$$

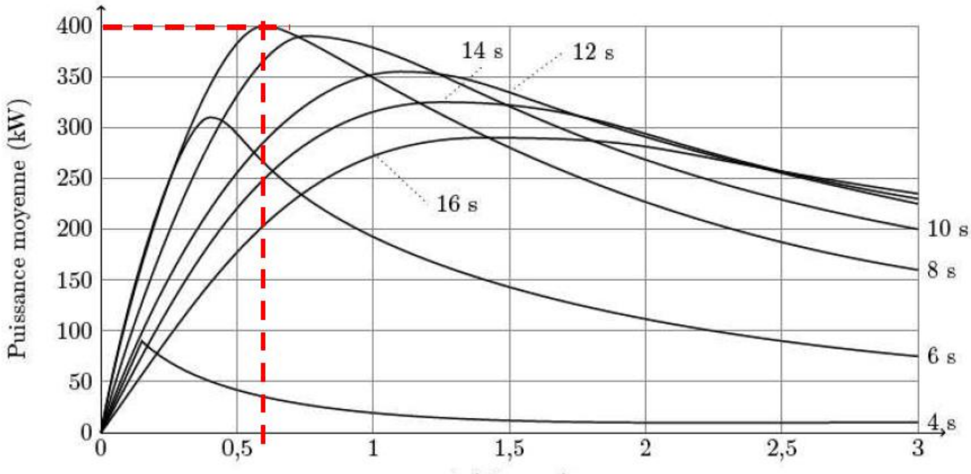
Q5. Application du théorème du moment dynamique :

$$\vec{\delta}_{A,2/0}.\vec{z_0} = (\overrightarrow{AG} \wedge m_2\vec{g}).\vec{z_0} - \lambda\dot{\theta} = -m_2gL\sin(\alpha + \theta) - \lambda\dot{\theta}$$

Soit l'équation projetée selon $\vec{z_0}$:

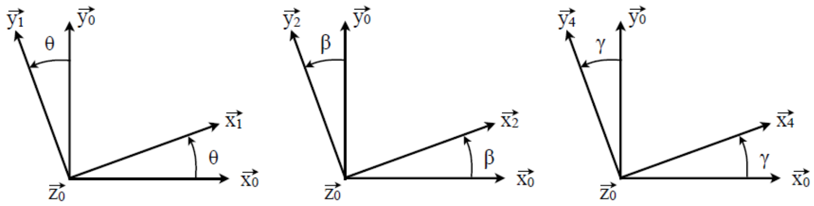
$$J(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + m_2dL(\ddot{\alpha}\cos\theta + \dot{\alpha}^2\sin\theta) = -m_2gL\sin(\alpha + \theta) - \lambda\dot{\theta}$$

Q6. Puissance maximale récupérable :



La puissance maximale récupérable est donc de $400kW$, pour une houle de période $8s$ et une valeur de $\lambda = 0,6 N.m.s$.

Q7. Figures de projection :



Q8. Roulement sans glissement en I entre **1** et **2** :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}_{I,2/1} = \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{V}_{I,2/0} - \overrightarrow{V}_{I,1/0} \\ &= \overrightarrow{V}_{A,2/0} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} - \overrightarrow{V}_{O,1/0} - \overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ &= r_2\overrightarrow{y_0} \wedge \dot{\beta}\overrightarrow{z_0} + r_1\overrightarrow{y_0} \wedge \dot{\theta}\overrightarrow{z_0} = \left[r_2\dot{\beta} + r_1\dot{\theta}\right]\overrightarrow{x_0}\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{V}_{I,1/0} = -r_1\dot{\theta}\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{V}_{I,2/0} = r_2\dot{\beta}\overrightarrow{x_0}$

Q9. On en déduit la relation : $r_1\dot{\theta} = -r_2\dot{\beta}$.

Q10. Les torseurs cinématiques en B sont :

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \begin{Bmatrix}\dot{\beta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0}\end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix}\dot{\beta}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} + \overrightarrow{BA} \wedge \dot{\beta}\overrightarrow{z_0}\end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix}\dot{\beta}\overrightarrow{z_0} \\ -b\overrightarrow{y_2} \wedge \dot{\beta}\overrightarrow{z_0} = -b\dot{\beta}\overrightarrow{x_2}\end{Bmatrix}_B$$

De plus, on a $\overrightarrow{V}_{B,3/0} = \overrightarrow{V}_{B,3/2} + \overrightarrow{V}_{B,2/0} = \overrightarrow{V}_{B,2/0}$ car B est le centre de la liaison pivot entre **2** et **3**. Donc :

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\} = \begin{Bmatrix}(\dot{\beta} + \omega_{3/2})\overrightarrow{z_0} \\ -b\dot{\beta}\overrightarrow{x_2}\end{Bmatrix}_B$$

Q11 . Torseur cinématique d'une liaison pivot glissant. Donc 1ddl en translation $v_{4/3}$ et 1ddl en rotation $\omega_{4/3}$ suivant l'axe $\overrightarrow{y_4}$.

Q12. On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{B,4/3} &= \vec{V}_{B,4/0} - \vec{V}_{B,3/0} \\
&= \vec{V}_{C,4/0} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/0}} + b\dot{\beta}\vec{x_2} = \vec{0} + L_v\vec{y_4} \wedge \overrightarrow{\dot{\gamma} z_0 + b\dot{\beta}\vec{x_2}} \\
&= L_v\dot{\gamma}\vec{x_4} + b\dot{\beta}\vec{x_2}
\end{aligned}$$

La norme de $\vec{V}_{B,4/3}$ se calcule donc en écrivant les composantes de $\vec{V}_{B,4/3}$ dans une base orthonormée. Ici, on sait que $\vec{V}_{B,4/3}$ est porté par $\vec{y_4}$. On projette donc dans la base $\mathcal{B}_4$:

$$\vec{x_2} = \cos(\gamma - \beta)\vec{x_4} - \sin(\gamma - \beta)\vec{y_4}$$

Donc :

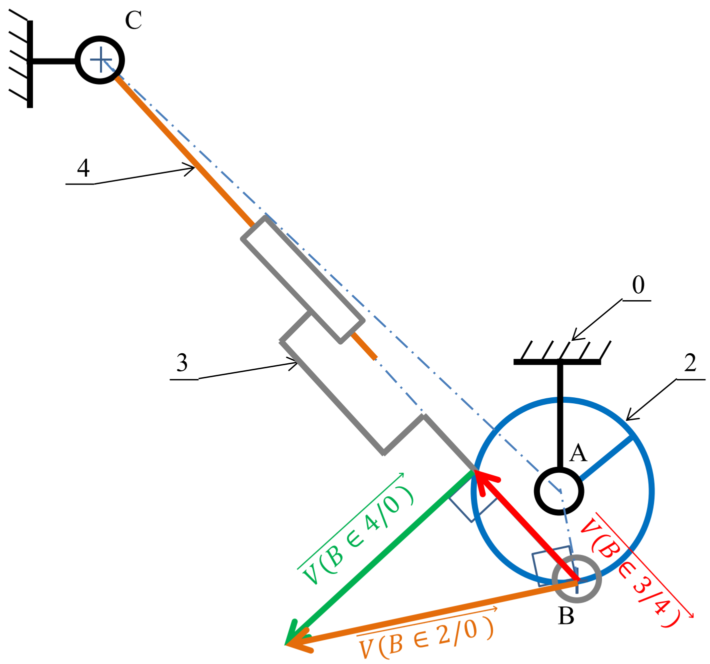
$$\vec{V}_{B,4/3} = L_v\dot{\gamma}\vec{x_4} + b\dot{\beta}(\cos(\gamma-\beta)\vec{x_4} - \sin(\gamma-\beta)\vec{y_4}) = \left[L_v\dot{\gamma} + b\dot{\beta}\cos(\gamma-\beta)\right]\vec{x_4} - b\dot{\beta}\sin(\gamma-\beta)\vec{y_4}$$

Donc, comme $\vec{V}_{B,4/3}$ est porté par $\vec{y_4}$:

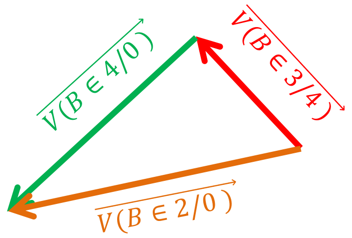
$$\begin{aligned}
\vec{V}_{B,4/3}.\vec{x_4} &= L_v\dot{\gamma} + b\dot{\beta}\cos(\gamma-\beta) = 0 \\
|\vec{V}_{B,4/3}.\vec{y_4}| &= \|\vec{V}_{B,4/3}\| = |b\dot{\beta}\sin(\gamma-\beta)|
\end{aligned}$$

Q13. $\overrightarrow{V(B \in 2/0)} \perp$ (AB)

Q14. $\overrightarrow{V(B \in 4/0)} \perp$ (BC) et $\overrightarrow{V(B \in 3/4)}$ // (BC)



Q15.



Q16. $\overrightarrow{V(B \in 3/4)}$ est maximale si $\overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \vec{0}$
Cela correspond (AB)⊥(BC) , ce qui est presque le cas figure 8

Q17. On cherche l'angle β_0 qui maximise la puissance transmise, donc qui maximise la vitesse $\|\overrightarrow{V}_{B,4/3}\|$. Donc $\|\overrightarrow{V}_{B,4/3}\| = |b\dot{\beta}\sin(\gamma-\beta)|$ est maximal lorsque $|\gamma-\beta| = \frac{\pi}{2}$. Il faut donc trouver un lien entre γ et β. Pour cela, on écrit la fermeture géométrique faisant intervenir les angles β et γ :

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & b\overrightarrow{y_2} + L_v\overrightarrow{y_4} + (r_1+r_2-c)\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & b\left[-\sin\beta\overrightarrow{x_0} + \cos\beta\overrightarrow{y_0}\right] + L_v\left[-\sin\gamma\overrightarrow{x_0} + \cos\gamma\overrightarrow{y_0}\right] + (r_1+r_2-c)\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0} \\
\Leftrightarrow\ & \left[-b\sin\beta - L_v\sin\gamma\right]\overrightarrow{x_0} + \left[b\cos\beta + L_v\cos\gamma + (r_1+r_2-c)\right]\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}
$$

En projetant sur les axes $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$, il vient :

$$
\begin{cases} -b\sin\beta - L_v\sin\gamma = 0 \\ b\cos\beta + L_v\cos\gamma + (r_1+r_2-c) = 0 \end{cases}
$$

Donc si $|\gamma-\beta| = \frac{\pi}{2}$, en supposant d'après le dessin que $\beta > \gamma$, on a : $\gamma = \beta - \frac{\pi}{2}$. En remplaçant dans les deux équations :

$$
\begin{cases} -b\sin\beta - L_v\sin(\beta-\frac{\pi}{2}) = 0 \\ b\cos\beta + L_v\cos(\beta-\frac{\pi}{2}) + (r_1+r_2-c) = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} -b\sin\beta + L_v\cos\beta = 0 \\ b\cos\beta + L_v\sin\beta + (r_1+r_2-c) = 0 \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases} L_v = b\tan\beta \\ b\cos\beta + b\tan\beta\sin\beta + (r_1+r_2-c) = 0 \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} L_v = b\tan\beta \\ b\left[1+\tan^2\beta\right] + = \frac{c-r_1-r_2}{\cos\beta} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases} L_v = b\tan\beta \\ b\frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{c-r_1-r_2}{\cos\beta} \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} L_v = b\tan\beta \\ \cos\beta = \frac{b}{c-r_1-r_2} \end{cases}
$$

On en déduit donc : $\beta_0 = \arccos\left[\frac{b}{c-r_1-r_2}\right]$.

Q18. On souhaite que l'angle γ reste négatif au cours du mouvement. Donc d'après la figure, β doit être compris entre 0 et 180°. Or, d'après la relation de la **Q9**, on a : $r_1\dot{\theta} = -r_2\dot{\beta}$, donc par intégration, pour une variation $\Delta\theta = 90^{/circ}$, on a :$\Delta\beta = -\frac{r_1}{r_2}\Delta\theta$.

Q19. Pour avoir un déplacement angulaire de $2\beta_0$, il faut donc :

$$
\frac{r_1}{r_2} = \frac{2\beta_0}{\Delta\theta}
$$

Avec $\Delta\theta = 90°$.

Q20. On reprend le résultat de la **Q13** :

$$
\begin{cases} -b\sin\beta - L_v\sin\gamma = 0 \\ b\cos\beta + L_v\cos\gamma + (r_1+r_2-c) = 0 \end{cases}
$$

Alors, en éliminant le paramètre γ :

$$
\begin{cases} -b\sin\beta = L_v\sin\gamma \\ b\cos\beta + (r_1+r_2-c) = -L_v\cos\gamma \end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases} -b\sin\beta = L_v\sin\gamma \\ \left[b\cos\beta + (r_1+r_2-c)\right]^2 + \left[b\sin\beta\right]^2 = L_v^2 \end{cases}
$$

La seconde équation s'écrit donc :

$$L_v = \sqrt{[b\cos\beta + (r_1 + r_2 - c)]^2 + [b\sin\beta]^2}$$

Q21. On en déduit alors les deux valeurs de L_v^{min} et L_v^{max} :

$$\begin{cases} L_v^{min} = c - r_1 - r_2 - b \\ L_v^{max} = \sqrt{[b\cos 2\beta_0 + (r_1 + r_2 - c)]^2 + [b\sin 2\beta_0]^2} \end{cases}$$

Donc on obtient :

$$\Delta L_v = \sqrt{[b\cos 2\beta_0 + (r_1 + r_2 - c)]^2 + [b\sin 2\beta_0]^2} - [c - r_1 - r_2 - b]$$

Q22 Pour diminuer F dans faire varier ΔE, il est donc nécessaire d'augmenter ΔL_v. Pour cela, il faut augmenter le paramètre b puisque :

$$\Delta L_v = \sqrt{b^2 + (r_1 + r_2 - c)^2 + 2b(r_1 + r_2 - c)\cos 2\beta_0} - [c - r_1 - r_2 - b]$$

Q23 Application numérique : on se place donc à une puissance à fournir de $10kW$ avec une fréquence d'oscillation de $1Hz$, donc $\Delta E = 10000*1 = 10kJ$ avec $\beta_0 \approx 80°$

$$F = \frac{\Delta E}{\Delta L_v} = \frac{10^3}{\sqrt{0,08^2 + (0,1 + 0,15 - 0,7)^2 + 2.0,8(0,1 + 0,15 - 0,7)\cos 2\beta_0} - [0,7 - 0,1 - 0,15 - 0,08]}$$

D'où : F = 1754 daN