

Programme de colle - semaine 20 du 09/03/2026 au 15/03/2026

1 Algèbre linéaire, épisode 2

On se concentrera sur les notions de base (trouver une base de noyau, d'image). On s'assurera que les notions vues à l'épisode 1 (SEV, famille de vecteurs) sont bien comprises.

- Application linéaire : définition, caractérisation par $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$, propriétés élémentaires.
- Image, noyau. Ce sont des SEV. Plus généralement, l'image directe / réciproque d'un SEV est un SEV. Caractérisation de l'injectivité.
- Opérations sur les applications linéaires : somme, multiplication par un scalaire, composée, réciproque d'une bijection. L'espace vectoriel $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$. L'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, noyau d'une matrice. (*Pas encore d'exercice fait sur ces notions*).
- Somme de deux SEV. Définition. C'est un SEV. Somme directe, caractérisation avec l'intersection.
- SEV supplémentaires.
Caractérisation avec des quantificateurs ou avec $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $E = F + G$.
Projection p sur F parallèlement à G (lorsque $E = F \oplus G$).
- Un dessin est bienvenu pour illustrer les notions de SEV supplémentaires et de projection.**
 p est linéaire, $\text{Im } p = F$, $\text{Ker } p = G$, $p \circ p = p$.
Caractérisation des projections par $p \circ p = p$: si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$, alors $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.
- Symétrie par rapport à F parallèlement à G . La caractérisation par $s \circ s = \text{Id}_E$ a été vue mais pas démontrée (aucun exercice fait sur les symétries).
- Détermination d'une application linéaire (ne pas insister sur ces propriétés, seule la première est utile pour l'instant) :
 - Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E , alors $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est génératrice de $\text{Im } f$.
 - Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 f est injective (resp. surjective, bijective) ssi $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est libre (resp. génératrice de E , une base de E).
 - Détermination sur une base : Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E .
Pour toute famille $(v_1, \dots, v_n)$ d'éléments de F , il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(u_i) = v_i$.
 - Détermination sur une somme directe (n'a pas été démontré) :
Soit E_1, E_2 deux SEV de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
Pour toutes $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$.
- **PAS VU** : dimension, rang, matrice d'application linéaire.

2 Démonstrations possibles

Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- a) L'image / le noyau sont des SEV.
- b) Caractérisation de l'injectivité.
- c) Pour F et G SEV de E , équivalence entre " F et G sont en somme directe" et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
- d) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.
Montrer que $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ en faisant un raisonnement par analyse - synthèse.
- e) Si $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est génératrice de $\text{Im } f$.
- f) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que si $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est libre, alors f est injective.

3 Exercices

1. CCINP exo 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

- a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
- b) f est-il surjectif ?
- c) Déterminer une base de $\text{Im } f$.
- d) (selon le temps) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

2. d'après CCINP exo 62

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

- a) Prouver que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f .
- b) Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

3. Autres possibilités

- a) Décrire le noyau / l'image d'une application linéaire donnée.
- b) Montrer que deux SEV sont supplémentaires, avec éventuellement la projection à expliciter.