

Programme de colle - semaine 22 du 23/03/2026 au 29/03/2026

1 Espaces vectoriels de dimension finie

Le principal objectif de cette colle est de faire comprendre l'importance de la dimension pour simplifier les raisonnements. Ainsi, la recherche de la dimension doit être un réflexe systématique.

On commencera par un exercice avec des objets simples ($\mathbb{R}^3$, petit polynôme ou petite matrice)

Il y a beaucoup de notions dans le cours, donc on ne demandera que des démonstrations marquées d'un (*).

1.1 Dimension

- Définition d'un EV de dimension finie.

Existence d'une base dans un EV de dimension finie : théorèmes de la base intercalée, de la base incomplète, de la base extraite (théorèmes utilisés uniquement dans le cours et les exercices abstraits).

Toute famille de $n + 1$ combinaisons linéaires des mêmes n vecteurs est liée.

Invariance du cardinal d'une base. Ce cardinal est appelé la dimension de l'espace vectoriel.

Par cohérence, on convient que la famille vide est une base de $\{\vec{0}\}$ et qu'il est de dimension 0.

- Dimension des espaces vectoriels usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

La dimension des espaces vectoriels fonctionnels (solutions d'une équation différentielle, suite récurrente linéaire d'ordre 2) a été vue mais est à redémontrer au cas par cas.

- **Lien entre cardinal et propriété d'une famille :**

Le cardinal d'une famille génératrice est $\geq$ à la dimension, et s'il y a égalité, c'est une base.

Le cardinal d'une famille libre est $\leq$ à la dimension, et s'il y a égalité, c'est une base.

- Rang d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$. Il est $\leq p$ (égalité ssi la famille est libre). *Aucun exercice fait sur le rang. Aucune méthode pratique de recherche du rang n'a été vue, en particulier les opérations sur les lignes/colonnes.*

Pour une famille de cardinal égal à $\dim E$, libre $\Leftrightarrow$ génératrice de E $\Leftrightarrow$ base de E .

- Dimension d'un produit cartésien.
- Si F est un SEV d'un EV E de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Dans ce cas, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Utilisation de la dimension pour montrer l'égalité de deux SEV.

- Tout SEV d'un EV de dimension finie admet un supplémentaire.
- Dimension de la somme de 2 SEV (formule de Grassmann).
- $E = F \oplus G \Leftrightarrow \dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$ (*)
- Base adaptée à une somme directe : soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F , $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_r)$ une base de G .

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \mathcal{B}'' = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_r) \text{ est une base de } E$$

1.2 Applications linéaires / matrices

- Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.

Donner à tout le monde une matrice d'application linéaire à chercher.

- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Sa matrice dans les bases canoniques. Noyau, image, rang d'une matrice. L'image d'une matrice est engendrée par les colonnes de la matrice.
- Lien entre les opérations matricielles et les opérations sur les applications linéaires (*) :

Combinaison linéaire.

Produit matrice/vecteur $\leftrightarrow$ image d'un vecteur par une application linéaire

Produit matriciel $\leftrightarrow$ composition.

Inversible $\leftrightarrow$ bijectif, inverse $\leftrightarrow$ réciproque.

- **Pas encore vu :** Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$, matrice d'une projection / symétrie dans une base adaptée.
- **Pas encore vu :** changement de base.

1.3 Application linéaires / dimension

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de même dimension finie, alors f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective (*)
- E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$.
- Rang d'une application linéaire. **Théorème du rang** (*)
Rang d'une matrice, théorème du rang (version matricielle). **Pas de recherche pratique du rang.**

2 Exercices

2.1 Exercices permettant de démontrer certains résultats de cours

Ne pas y passer trop de temps !

Dans tous les cas, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. *Pour démontrer l'existence d'un supplémentaire (démonstration non détaillée en cours)*

Soit F un SEV de E , $(u_1, \dots, u_p)$ une base de F .

- a) Montrer qu'on peut la compléter en une base $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ de E .
- b) On pose $G = \text{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_n)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

2. *Pour démontrer le théorème du rang (démonstration détaillée en cours)*

Soit F un $\mathbb{K}$ -EV et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit G un SEV de E tel que $E = \text{Ker } f \oplus G$.

Montrer que l'application $\Phi: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \text{Im } f \\ u & \longmapsto & f(u) \end{array}$ est un isomorphisme.

3. *Base adaptée à une somme directe (démonstration non détaillée en cours)*

Soit F, G deux SEV de E , soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F , $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_r)$ une base de G , $\mathcal{B}'' = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_r)$ la famille concaténée.

- a) Montrer que $E = F + G \Leftrightarrow \mathcal{B}''$ est génératrice de E .
- b) Montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \mathcal{B}''$ est libre.

2.2 Exercices de type banque CCINP

1. **CCINP exo 71**

Changer les paramètres

Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

2. **CCINP exo 90**

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes. Soit a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés dans $\mathbb{K}$.

- a) Montrer que $\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- b) **Question rajoutée** : donner la matrice de Φ dans les bases canoniques.
- c) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
- Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 - Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
- d) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
- e) **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

3. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 4

On pourra changer légèrement les paramètres, mais ça ne doit pas être trop calculatoire.

On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $F = \{u \in E, u^{(4)} = 16u\}$ où $u^{(4)}$ est la dérivée 4^e de u .

Soit $F_1 = \{u \in E, u'' = 4u\}$ et $F_2 = \{u \in E, u'' = -4u\}$

- Montrer que $F = F_1 \oplus F_2$.
- Donner une base et la dimension de F_1 puis de F_2 .
- Donner une base (notée $\mathcal{B}$) et la dimension de F .
- Soit $d: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$

Montrer que $d \in \mathcal{L}(F)$ puis donner la matrice de d dans $\mathcal{B}$. On la note M

- Calculer M^4 .