

Problème 1 : Vérification de performances d'un hélicoptère

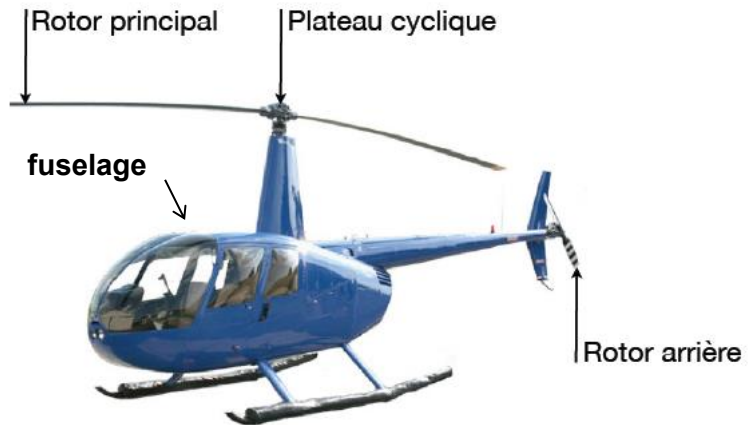
I. Mise en situation

I.1 Contexte

Un hélicoptère est un aéronef qui peut effectuer un vol stationnaire et permet ainsi des missions inaccessibles à la plupart des autres aéronefs.

I.2 Présentation du système

On s'intéresse dans ce sujet à l'hélicoptère Robinson R44 Raven II, un hélicoptère léger produit par la compagnie Robinson Helicopter depuis 2006. Alliant fiabilité et performance, le Robinson R44 est devenu l'hélicoptère le plus vendu au monde dans sa catégorie.



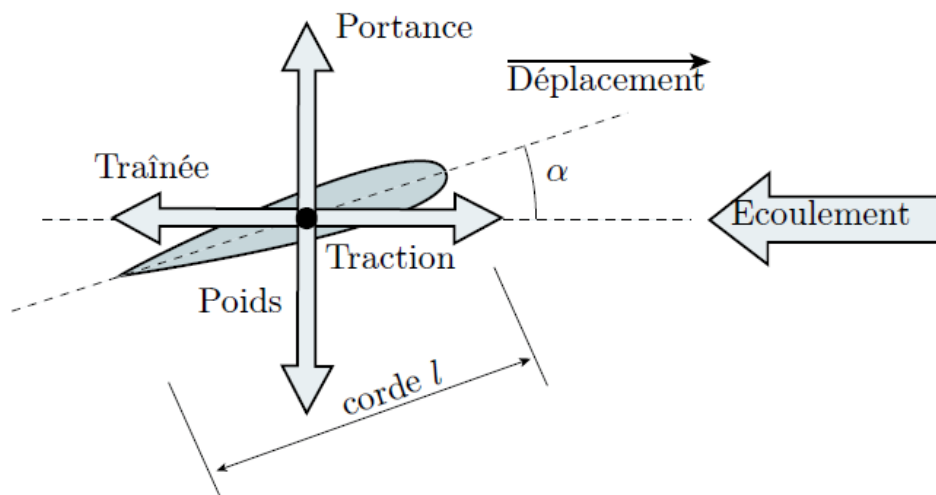
I.3 Principaux éléments constitutifs

Cet hélicoptère est composé d'un rotor principal à deux pales et d'un rotor arrière en extrémité de la queue. Les deux pales du rotor principal et l'hélice du rotor de queue sont entraînées par un unique moteur et la puissance transmise est adaptée en continu en fonction de la configuration de vol souhaitée.

I.4 Fonctionnement

Un objet placé dans un écoulement d'air, comme c'est le cas de la pale d'hélicoptère, subit une force aérodynamique. On décompose cette force en deux composantes :

- Une composante qui s'applique dans la direction de l'écoulement et dans le sens du vent relatif : **la traînée**.
- Une composante perpendiculaire, dirigée vers le haut : **la portance**, créée par une différence de pression entre les parties inférieure (intrados) et supérieure (extrados) de la pale.



Dans un écoulement horizontal, l'équilibre vertical de l'aéronef peut être atteint si la portance compense son poids. Le maintien en vol horizontal est assuré par une force de traction qui s'oppose à la traînée.

Pour que ces actions soient créées, chaque pale doit nécessairement être inclinée d'un certain angle autour de son axe longitudinal : c'est l'angle d'incidence (parfois également nommé angle d'attaque), noté α .

En vol stationnaire, les angles d'incidence de deux pales sont égaux et constants. Mais lorsque l'hélicoptère se déplace, il faut les faire varier de manière adaptée. Le dispositif qui permet, selon les consignes du pilote, d'appliquer cette variation d'angle d'incidence est le plateau de pas cyclique.

I.5 Performances et cahier des charges

On considère l'extrait de cahier des charges suivant.

Critère	Niveau	Limite
Vitesse longitudinale maximale (km/h)	250	mini
Vitesse ascensionnelle maximale (km/h)	20	mini
Masse transportable (kg)	400	mini
Distance franchissable (km)	600	mini

II. Vérification du critère de masse transportable

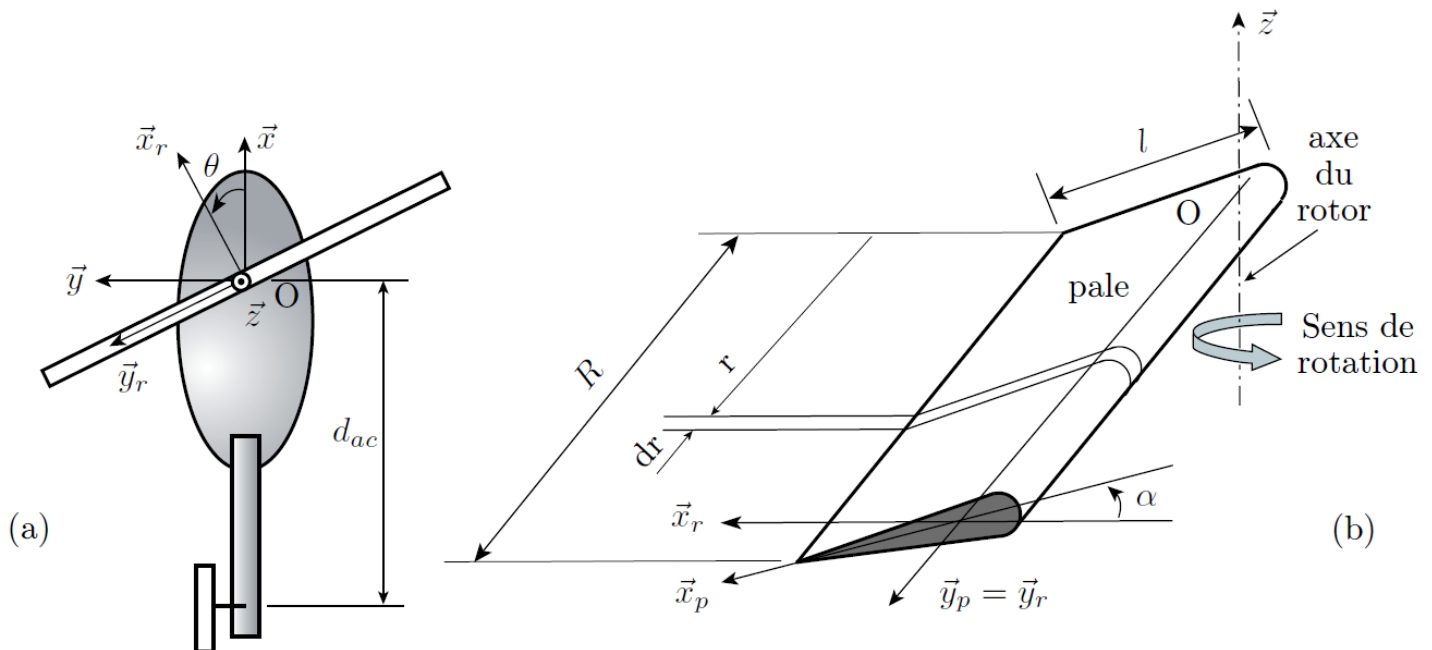
L'objectif de cette partie est de déterminer si les choix techniques retenus par le constructeur permettent de respecter le critère de masse embarquée défini ci-avant.

On se place donc ici dans le cas d'un décollage et on cherche à déterminer l'action de portance créée par l'air sur les pales pour vérifier quel poids elle peut compenser.

II.1 Détermination de l'action mécanique de l'air sur le rotor principal

On considère une voilure tournante constituée de deux pales identiques de longueur $R = 5$ m et de largeur de corde $l = 26$ cm, disposées symétriquement par rapport à l'axe du rotor. On néglige l'interaction aérodynamique entre les pales ainsi que tous les effets liés à la longueur finie et à la turbulence. L'angle d'incidence α correspond à l'angle que fait la direction $\vec{x}_p$ de la pale avec la direction $\vec{x}_r$ liée au rotor.

La figure ci-dessous donne une description du paramétrage : (a) vue de dessus et repère tournant lié au rotor et (b) géométrie simplifiée de la pale et repère de la pale.



Les densités d'effort surfacique s'appliquant sur une pale, entraînant respectivement la portance et la traînée, sont données par un modèle de comportement, simple mais cohérent en première approximation, obtenu par des essais en soufflerie :

- $f_z(r) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_z(\alpha) \cdot r^2 \cdot \omega^2$ pour la portance
- $f_x(r) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C_x(\alpha) \cdot r^2 \cdot \omega^2$ pour la traînée

Dans ces expressions, ρ désigne la masse volumique de l'air valant 1.3 kg/m^3 dans les conditions normales.

$C_x(\alpha)$ et $C_z(\alpha)$ sont respectivement les coefficients de traînée et de portance. Ils dépendent de l'angle α que fait la corde du profil avec la direction de l'écoulement, sont sans unité et déterminés expérimentalement. $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire du rotor (repère $(O, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r)$) par rapport au fuselage de l'hélicoptère (repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$).

- Q1.** Donner l'expression de l'action élémentaire de l'air sur une pale, notée $\overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}}$, agissant sur un élément de pale de surface projetée $dS = l.dr$.
- Q2.** En déduire la résultante des actions de l'air sur une pale, notée $\overrightarrow{R_{air \rightarrow pale}}$. L'écrire sous la forme $\overrightarrow{R_{air \rightarrow pale}} = A. (C_z(\alpha)\vec{z} + C_x(\alpha)\vec{x}_r)$ et expliciter A en fonction de ρ , l , R et ω .
- Q3.** En déduire la force totale exercée par l'air sur les deux pales du rotor principal, notée $\overrightarrow{R_{air \rightarrow rp}}$, sachant que, dans le cas d'étude présent, les pales possèdent le même angle d'incidence.

II.2 Détermination de l'expression de la masse transportable

On suppose maintenant que le rotor est entraîné à vitesse constante à sa vitesse angulaire limite ω_{max} et que l'hélicoptère est initialement posé au sol avec un angle d'incidence des pales $\alpha = 0^\circ$. Le pilote actionne la commande dite « de pas collectif » pour augmenter progressivement l'angle α d'incidence des pales jusqu'à la limite du décollage. Dans ce cas, la portance, c'est-à-dire la composante sur $\vec{z}$ de $\overrightarrow{R_{air \rightarrow rp}}$ supporte totalement le poids de l'appareil chargé au maximum. La masse de l'appareil est alors $M_{totale} = M_{vide} + M_{transportable}$.

La masse à vide M_{vide} de l'hélicoptère est de 683kg.

- Q4.** Donner l'expression de la masse $M_{transportable}$ que l'hélicoptère peut déplacer en fonction de M_{vide} et des autres paramètres du problème.

Dans les domaines comme l'aéronautique et plus généralement lorsqu'il y a transport de personnes, on applique de forts coefficients de sécurité. Ceux-ci parent à toute utilisation non prévue (hypothèses d'étude, défaillance d'une pièce, événement extérieur imprévu, etc.) ou inadaptée (imprudence de l'utilisateur, surcharge accidentelle, etc.). Ici, le coefficient appliqué est :

$$s = \frac{M_{transportable \text{ théorique}}}{M_{transportable \text{ réelle}}} = 8$$

- Q5.** En déduire l'expression de la masse transportable réelle, $M_{transportable \text{ réelle}}$.

II.3 Détermination de la vitesse de rotation maximale du rotor principal

Le rotor, entraînant les pales de rayon $R = 5m$, tourne par rapport à la cabine (ou fuselage) suivant l'axe vertical $(O; \vec{z})$.

Cette rotation relative est repérée par l'angle θ .

On considère qu'il n'y a pas de vent extérieur : $\overrightarrow{V_{M \in air/sol}} = \vec{0} \quad \forall M$

- Q6.** Exprimer la vitesse d'un point P de la pale par rapport à la cabine dans cette configuration, tel que P soit distant de r de l'axe de rotation du rotor principal : $\overrightarrow{OP} = r.\vec{y}_r$

- Q7.** En déduire la vitesse du vent apparent au point P , c'est-à-dire la vitesse de l'air par rapport à la pale en fonction de la distance r et de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ de rotation de l'axe. On rappelle que l'on se place à la limite du décollage, donc que la vitesse de l'appareil par rapport au sol est nulle.

En pratique, le pilote doit contrôler la vitesse de rotation de la voilure, grâce à une modulation de la puissance fournie par le moteur, afin de maintenir la vitesse de l'extrémité des pales par rapport à l'air significativement en

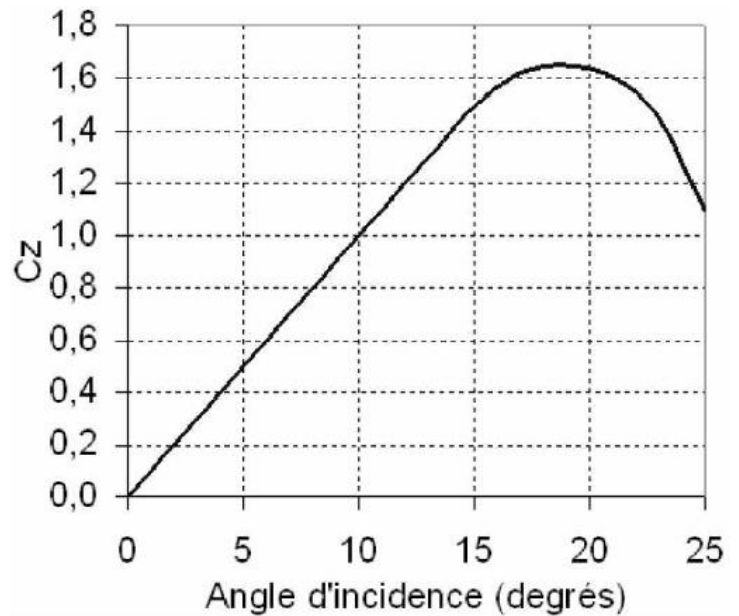
dessous de la vitesse du son, valant $c = 340\text{m/s}$ au niveau de la mer dans les conditions normales. On limite donc la vitesse de l'écoulement d'air à $V_{\max} = 0,6.c$ en bout de pale.

Q8. Déterminer la vitesse de rotation maximale $\omega_{\max}$ autorisée pour éviter de dépasser la vitesse $V_{\max}$ en bout de pale.

II.4 Détermination du coefficient de portance

La loi d'évolution du coefficient de portance C_z en fonction de l'angle d'incidence α est présentée sur la figure ci-contre.

Q9. Quelle est la valeur maximale de $C_z(\alpha)$?



II.5 Conclusion

Q10. A partir des questions précédentes, conclure vis-à-vis du cahier des charges. On prendra $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

III. Vérification de la longueur de queue

III.1 Mise en évidence de la problématique

Q11. En reprenant le paramétrage de la partie II.1, exprimer le moment élémentaire en O des efforts élémentaires de l'air sur la pale.

Q12. Montrer que le moment résultant en O des moments élémentaires de l'air sur une pale s'écrit :

$$\overrightarrow{M_{O,air \rightarrow pale}} = \frac{3.R}{4} A. (C_z(\alpha) \overrightarrow{x_r} - C_x(\alpha) \overrightarrow{z}) \text{ où } A \text{ est le coefficient déterminé en Q2.}$$

Q13. En déduire le moment total en O exercé par l'air sur les deux pales du rotor principal, noté :

$$\overrightarrow{M_{O,air \rightarrow rp}}$$

Q14. Commenter physiquement et de façon qualitative ce résultat en interprétant l'équilibre de l'hélicoptère.



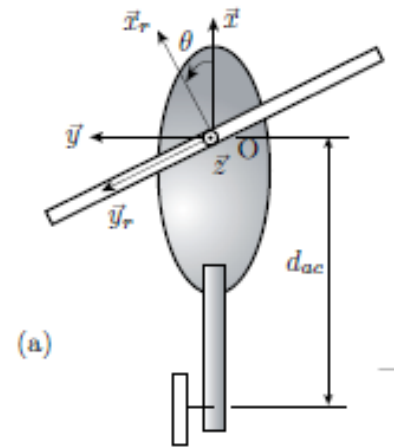
Pour contrer cet effet, plusieurs techniques existent. La plus courante est celle utilisée sur le Robinson R44 Raven II, qui utilise un second rotor, nommé rotor arrière, rotor de queue ou encore rotor anti-couple (voir photo ci-contre).

Disposé à l'extrémité de la queue de l'appareil, il est monté dans un plan vertical. Ainsi, la portance engendrée par l'action de l'air sur celui-ci se situe dans un plan horizontal.

L'objectif de cette partie est de vérifier la pertinence de la distance entre les axes des rotors principal et anti-couple, nommée longueur de queue et notée d_{ac} qui vaut ici 6m.

III.2 Détermination du moment induit au niveau du rotor principal par la résultante de l'action de l'air sur le rotor anti-couple

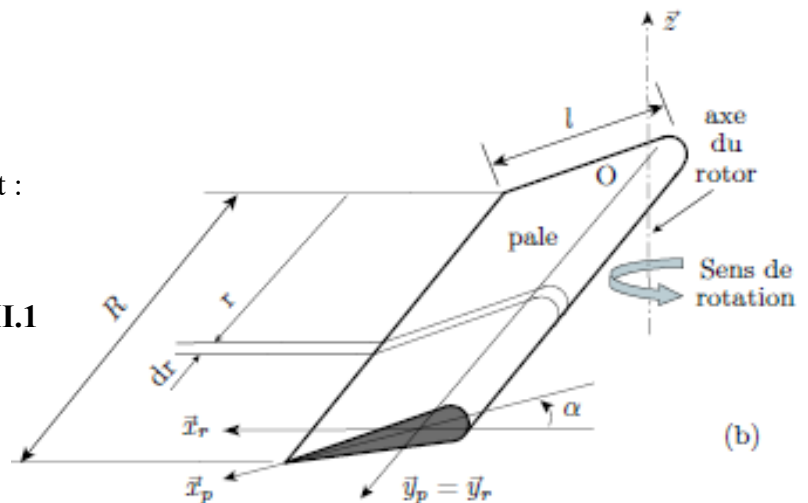
La portance et la traînée du rotor anti-couple sont données par les mêmes expressions que pour le rotor principal. Comme pour ce dernier, la vitesse angulaire du rotor anti-couple est constante et proportionnelle à celle du rotor principal selon $\omega_{ac} = \lambda \cdot \omega$ avec $\lambda = 6,66$. Seul change l'angle d'incidence des pales, α_{ac} , commandé par le pilote grâce aux palonniers.



Les dimensions des pales du rotor anti-couple sont :

- $R_{ac} = 75$ cm leur longueur
- $l_{ac} = 10$ cm leur largeur

avec les mêmes notations que sur la figure partie II.1



On néglige toute interaction aérodynamique entre les deux rotors et entre les pales elles-mêmes.

Q15. En reprenant le résultat de la question **Q3**, déterminer l'expression de la norme de l'action de l'air sur les pales du rotor anti-couple, notée $\|\overrightarrow{R_{air \rightarrow rac}}\|$.

Q16. Quel moment $\|\overrightarrow{M_{(O, R_{air \rightarrow rac})}}\|$ induit alors cette résultante sur l'axe du rotor principal ?

III.3 Conclusion

Q17. A partir des questions précédentes, déterminer l'expression du bras de levier d_{ac} traduisant le rôle du rotor anti-couple, en fonction de λ , l , R , l_{ac} , R_{ac} , $C_x(\alpha)$ et $C_z(\alpha_{ac})$.

Le coefficient de traînée $C_x(\alpha)$ est obtenu expérimentalement. Le cas le plus défavorable est celui pour lequel ce coefficient est maximal. D'après l'expérience, on a alors $C_x(\alpha)_{\max} = 14,6 \cdot 10^{-2}$.

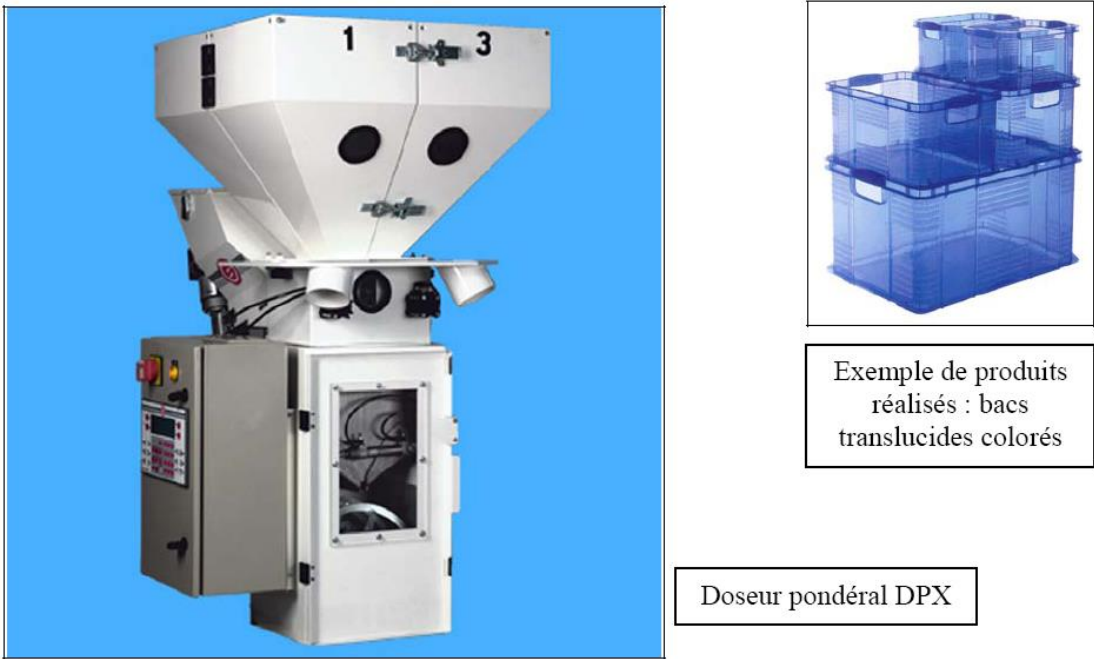
Le coefficient de portance créé par le rotor anti-couple doit alors lui aussi être maximal.

Il vaut ainsi $C_z(\alpha_{ac})_{\max} = 1,65$.

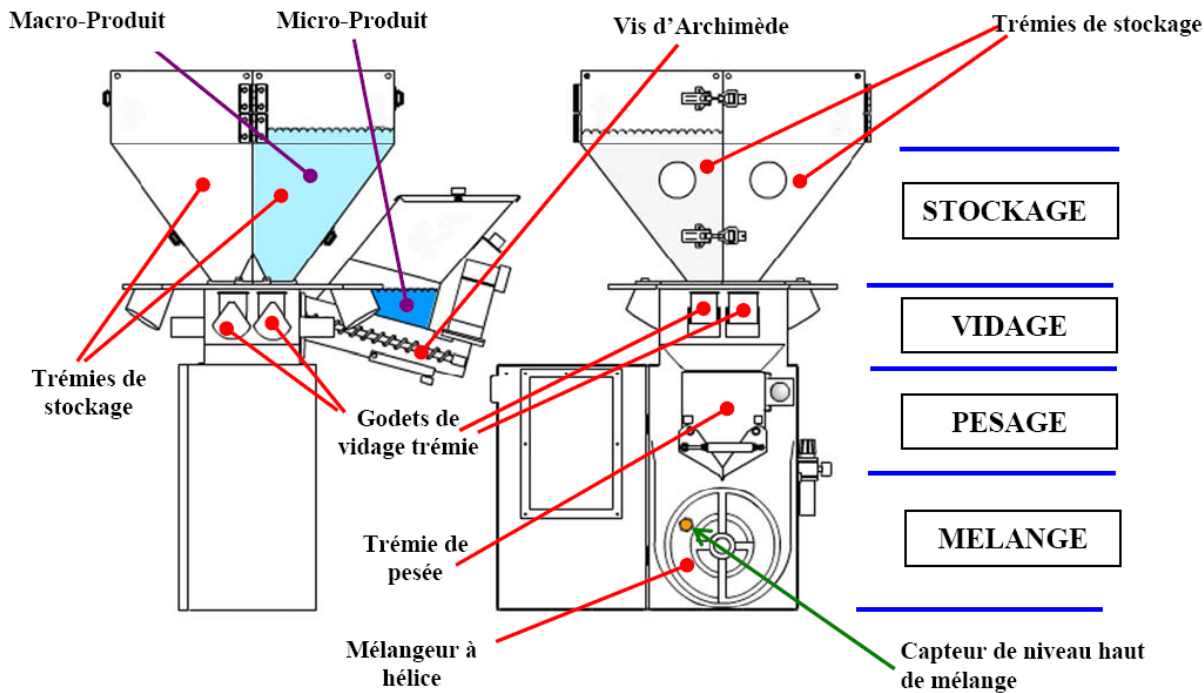
Q18. Faire l'application numérique dans le cas limite décrit. Cette valeur est-elle conforme au choix fait par le constructeur ?

Problème 2 : Doseur pondéral de granules plastiques (extrait Mines MP 08)

L’injection de matière plastique est une technique qui consiste à pousser de la matière plastique chauffée dans un moule afin de réaliser une pièce. La machine qui réalise cette opération est appelée « **presse à injecter** »



La matière plastique « première » sous forme de différents granulés (produits principaux : macro-produits et colorants : micro-produits) est conservée dans des silos de grande taille. Le transport de ces matières vers les presses est réalisé automatiquement au moyen de canalisations et d’aspirateurs dans des trémies de stockage situées au-dessus d’un **doseur pondéral** qui permet le **dosage et le mélange** des granulés.



Extrait du cahier des charges

Exigence technique	critères	valeurs
Mesurer le poids de granulés présents dans la trémie quel que soit leur « arrangement »	Précision	2%
	Position du centre de gravité	inconnue

Validation de l’exigence technique : Mesurer le poids de granulés

On souhaite mesurer le poids de la trémie de pesage, soit la résultante P du torseur :

$$\{T_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{trémie}}\} = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{y} \\ 0 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G \quad \text{avec } G : \text{centre de gravité de la trémie}$$

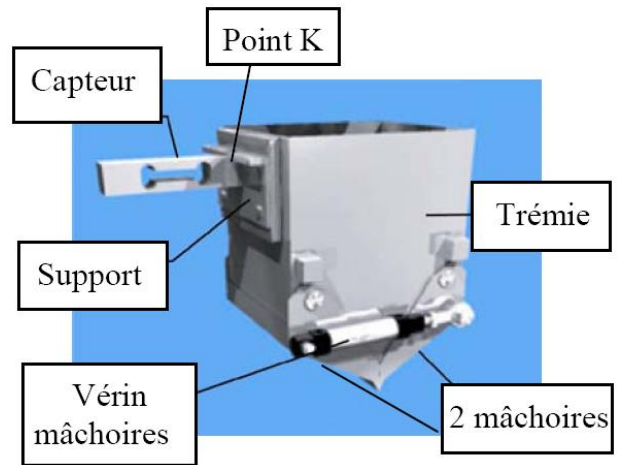
Un capteur visible sur la figure ci-contre supporte la trémie.

Un de ses cotés est lié au bâti de la machine, son autre coté étant accroché en un point K à la trémie.

Lors de la chute des granulés, le **centre de gravité** de la masse des granulés occupe une **position variable et inconnue**.

Le torseur des actions mécaniques exercées par la trémie sur le capteur peut s'écrire :

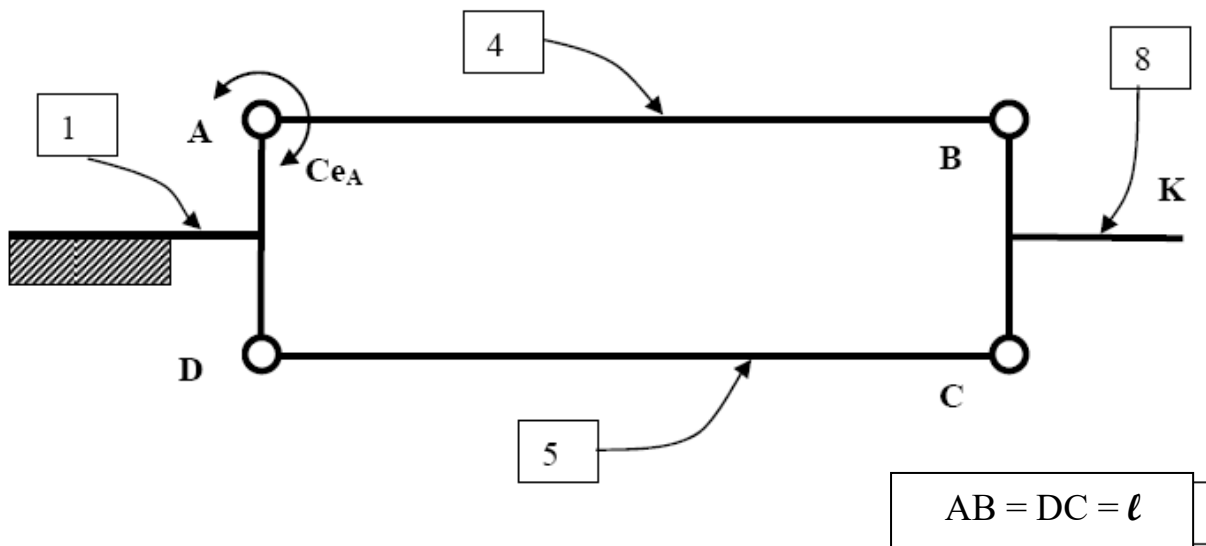
$$\{T_{\text{trémie} \rightarrow \text{capteur}}\} = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{y} \\ M_K \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_K$$



Le capteur réel peut être modélisé par une structure parallélogramme 4 barres liées par 4 liaisons pivots élastiques (voir figure donnée en annexe).

Pour que la mesure donnée par le capteur soit indépendante de la position de G , le comportement du capteur ne doit pas dépendre du moment M_K .

Pour cela on va étudier dans un premier temps un modèle simplifié (figure ci-dessous) dans lequel seule la liaison pivot en A est une liaison pivot élastique, les autres liaisons pivot en B, C, D étant parfaites.

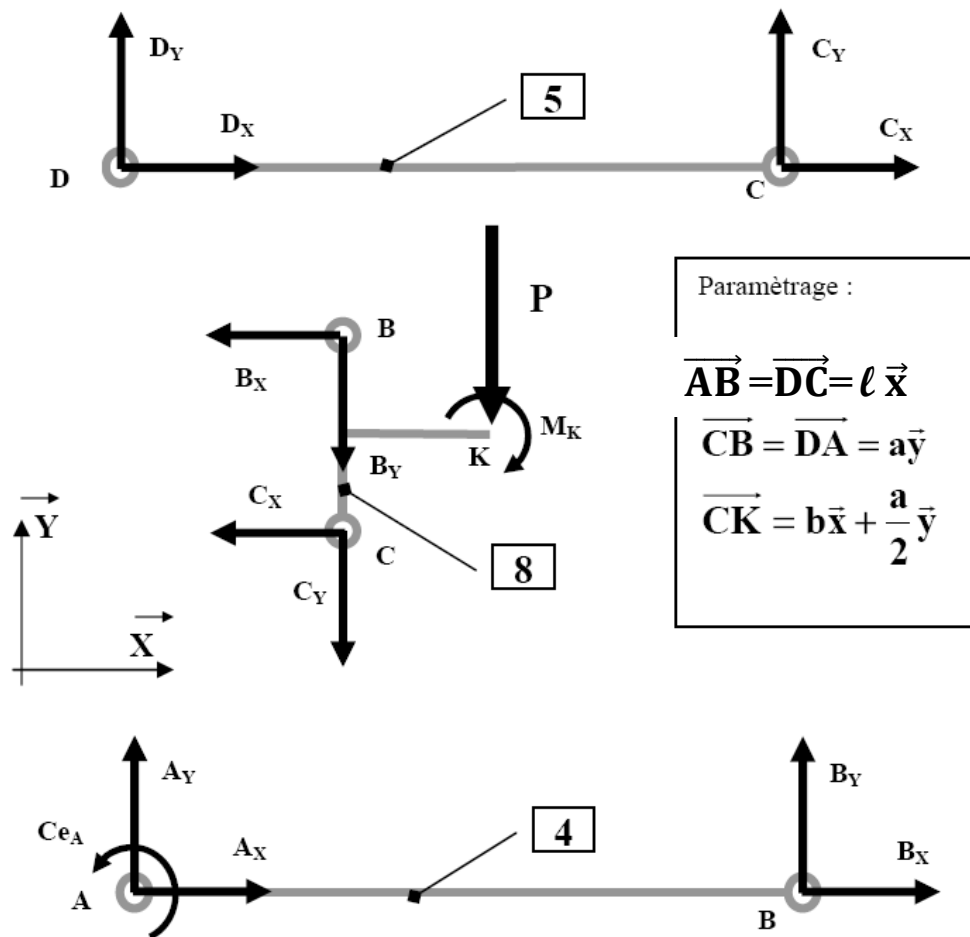


Le torseur de la liaison pivot élastique s'écrit : $\{T_{1 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} A_x \cdot \vec{x} + A_y \cdot \vec{y} \\ C_{eA} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$

La technologie du capteur permet de mesurer CeA . On souhaite donc vérifier qu'il existe une relation $P=f(CeA)$ indépendante de M_K .

Le problème est supposé plan. On suppose que les poids des éléments constitutifs du capteur sont négligés par rapport aux autres actions mécaniques exercées.

La figure ci-dessous donne les Bilans d'Actions Mécaniques Extérieures à $\{5\}, \{8\}$ et $\{4\}$.



Q1- En isolant successivement $\{5\}$, $\{8\}$ et $\{4\}$, trouver la relation $P=f(CeA)$.

Le capteur d'efforts utilisé (cf annexe) est en réalité constitué de 4 zones rigides 1, 8, 4 et 5 reliées par 4 zones déformables 2, 3, 6 et 7 que l'on peut modéliser par quatre liaisons pivots élastiques. On retient un modèle d'étude plan et les torseurs d'efforts transmissibles dans chacune des liaisons pivots non parfaites peuvent s'écrire :

$$\{T_{1 \rightarrow 4}\}_{liaison 3} = \begin{Bmatrix} A_x \cdot \vec{x} + A_y \cdot \vec{y} \\ C_{eA} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A ; \quad \{T_{8 \rightarrow 4}\}_{liaison 7} = \begin{Bmatrix} B_x \cdot \vec{x} + B_y \cdot \vec{y} \\ C_{eB} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_B$$

$$\{T_{8 \rightarrow 5}\}_{liaison 6} = \begin{Bmatrix} C_x \cdot \vec{x} + C_y \cdot \vec{y} \\ C_{eC} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_C ; \quad \{T_{1 \rightarrow 5}\}_{liaison 2} = \begin{Bmatrix} D_x \cdot \vec{x} + D_y \cdot \vec{y} \\ C_{eD} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_D$$

L'action de la trémie sur le capteur est modélisée par le torseur : $\{T_{trémie \rightarrow 8}\} = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{y} \\ M_K \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_K$

Des jauges de déformation, qui sont constituées de fins fils résistants collés dans la zone déformable 3, permettent de mesurer la valeur de CeA , ce qui permet de déterminer P .

Pour dimensionner le capteur il est donc nécessaire de déterminer la relation entre P et CeA dans le cas de cette deuxième modélisation beaucoup plus proche du capteur réel.

Hypothèse :

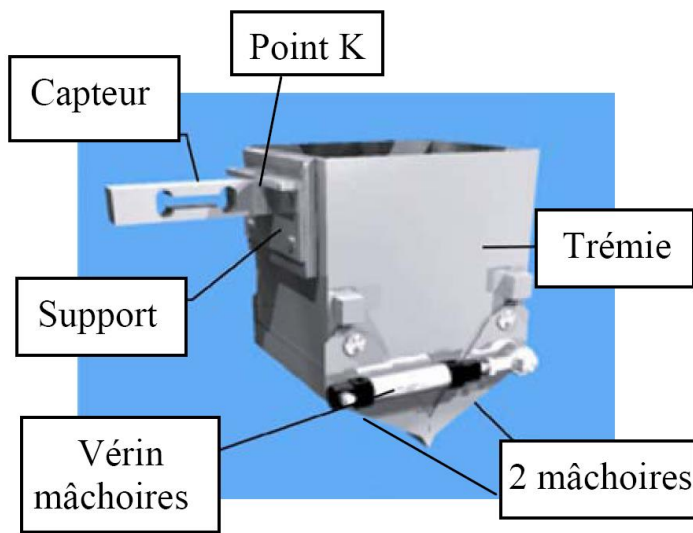
Les couples élastiques sont supposés proportionnels aux déformations élastiques en A, B, C et D.

On peut donc supposer que ces couples sont égaux : $C_{eA} = C_{eB} = C_{eC} = C_{eD} = C_e$

Q2- Déterminer la relation entre P et C_e pour cette nouvelle modélisation du capteur.

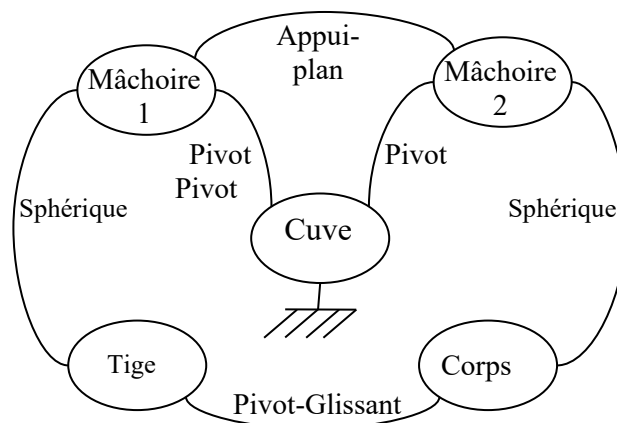
Etude d'une exigence non spécifiée : Vider la trémie de pesage

Sur les machines de petite capacité un dispositif à mâchoires, représenté ci-dessous, est retenu.

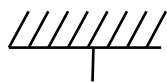


Les deux mâchoires sont en liaison pivot avec la cuve. En position fermée (figure de gauche) on modélise la liaison entre les deux mâchoires par une liaison appui plan. Un seul vérin actionne l'ouverture et la fermeture des mâchoires. La tige du piston du vérin et le corps du vérin sont respectivement en liaison sphérique avec chacune des deux mâchoires.

On donne le graphe de structure du dispositif étudié.

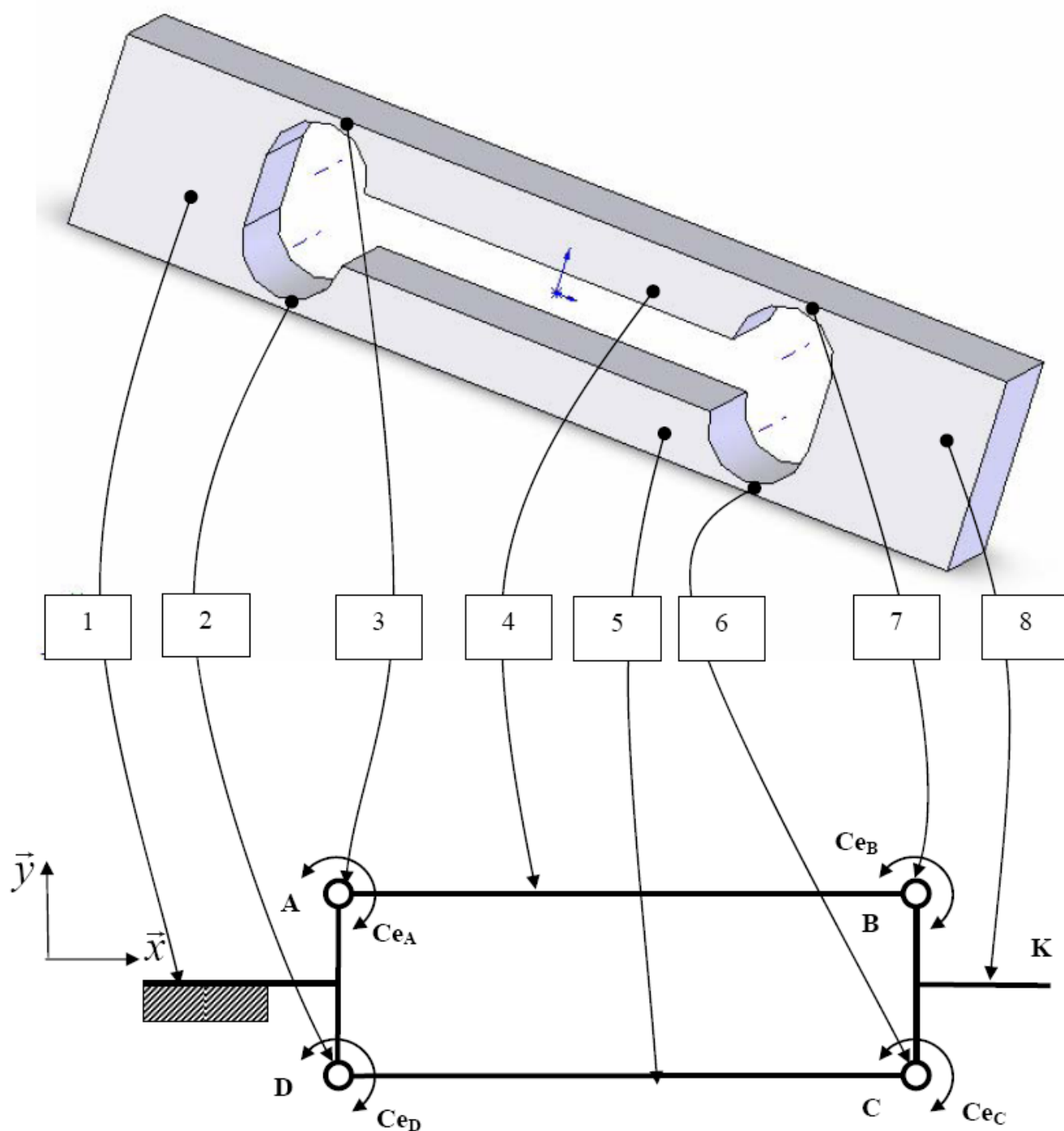


Q3- Compléter le schéma cinématique plan ci-dessous. il sera représenté dans la position « mâchoires fermées ».



ANNEXE

LE CAPTEUR D'EFFORTS ET SON MODELE PLAN 2D



1 Partie rigide liée au bâti

8 Partie rigide liée à l'élément chargé (cuve) dont on veut mesurer le poids P

2 3 6 7 Parties déformables identiques modélisées par des liaisons pivots élastiques

4 5 Parties rigides modélisées par des barres

Problème 3 : Chargement/déchargement de cargos porte-conteneurs (extrait Centrale PSI 2013)

Performances et architecture des grues

Le rôle des ports dans le transport mondial des marchandises

Le transport des marchandises (hydrocarbures, charbon, agroalimentaire, ciment, matériaux de construction, biens de consommation ...) à travers le monde est incontournable dans l'économie moderne. Excepté les matières premières, ces marchandises sont envoyées par conteneurs. Au port de Marseille (premier port français), 950 000 conteneurs transitent chaque année, soit 9 millions de tonnes de marchandises et 1 300 navires.

Les conteneurs sont des boîtes standardisées, d'une masse maximale de 40 tonnes, permettant de transporter des marchandises du fournisseur au client par navire, train, camion, voire par avion, sans déballer la marchandise.

Les navires « post-panamax » sont les plus gros navires de transport et peuvent embarquer jusqu'à 13 000 conteneurs.



Figures 1et 2 : cargo porte-conteneurs et grues de chargement–déchargement

Pour rejoindre sa destination finale, un conteneur changera plusieurs fois de navire. Il sera déchargé puis rechargé par des grues dans des plateformes portuaires, véritables « hubs » du réseau maritime.

Le temps d'immobilisation des navires à quai est donc un paramètre important du coût du transport. Ainsi les deux prestations principales attendues pour la grue sont la sécurité des hommes et des marchandises et la cadence de transfert. Le tableau ci-dessous donnent les caractéristiques du cahier des charges partiel de la phase de déchargement.

Exigence	Critère	Niveau
Déplacer les conteneurs du navire vers les camions de transfert	Masse maximale du conteneur	40 tonnes
	Altitude des conteneurs sur le navire par rapport au quai	−13 m à 40 m
	Longueur × largeur du navire	400 m × 50 m
	Précision du positionnement du conteneur	10 cm
Assurer la sécurité du contenu du conteneur	Accélération maximale du conteneur (verticale × horizontale)	1 g × 0,5 g
Fonctionner malgré des conditions météorologiques difficiles	Stabilité du portique	Aucun renversement
	Plage de vitesse de vent autorisant les activités portuaires de déchargement	0 à 120 km · h ^{−1}
	Vitesse maximale du vent mesurée au cours des 100 dernières années	300 km · h ^{−1}
Assurer une cadence de transfert suffisamment rapide	Cadence	2 min par conteneur en moyenne

Tableau 1 : cahier des charges partiel de la grue de chargement/déchargement

L'objet de ce sujet est la validation de quelques-unes des performances qui contribuent à la réalisation de ces prestations.

Architecture d'une grue et performances souhaitées des nouvelles motorisations

Les grues (voir figure 3) sont constituées d'un portique (structure métallique) dont les quatre pieds peuvent se déplacer sur deux rails, d'un chariot de levage et d'un « spreader », situé à l'extrémité des câbles, permettant de s'arrimer au conteneur par un verrouillage aux quatre coins supérieurs.

Chaque grue de déchargement assure trois mouvements principaux de translation du conteneur : un mouvement appelé « *translation* », horizontal et parallèle au quai (suivant $\vec{x}$), un mouvement appelé « *direction* », horizontal et perpendiculaire au quai (suivant $\vec{y}$) et un mouvement de « *levage* », vertical (suivant $\vec{z}$).

Le mouvement de *translation* est assuré par quatre moteurs implantés dans chaque pied de la grue (soit 16 moteurs au total), permettant à l'ensemble de la grue de se déplacer le long de deux rails. Le mouvement de *direction* est assuré par un chariot motorisé se déplaçant sur le portique. Le mouvement de *levage* est assuré par un treuil et un moufle de douze câbles.

Éléments détaillés du cahier des charges

- **translation** : vitesse maximale $V_{tm} = 0.75 \text{ ms}^{-1}$, accélération maximale $\gamma_{tm} = 0.1 \text{ ms}^{-2}$. La masse du portique vaut $M_p = 1080 \text{ tonnes}$;
- **direction** : vitesse maximale $V_{dm} = 2.5 \text{ ms}^{-1}$, accélération maximale $\gamma_{dm} = 0.6 \text{ ms}^{-2}$ pour un chariot de masse $M_{ch} = 27 \text{ tonnes}$;
- **levage** : vitesse maximale $V_{lmv} = 1.65 \text{ ms}^{-1}$ à vide (c'est-à-dire sans conteneur) et $V_{lmp} = 0.75 \text{ ms}^{-1}$ avec un conteneur de masse $M_c = 40 \text{ tonnes}$ et un spreader de masse $M_s = 10 \text{ tonnes}$, accélération maximale $\gamma_{lm} = 0.5 \text{ ms}^{-2}$.

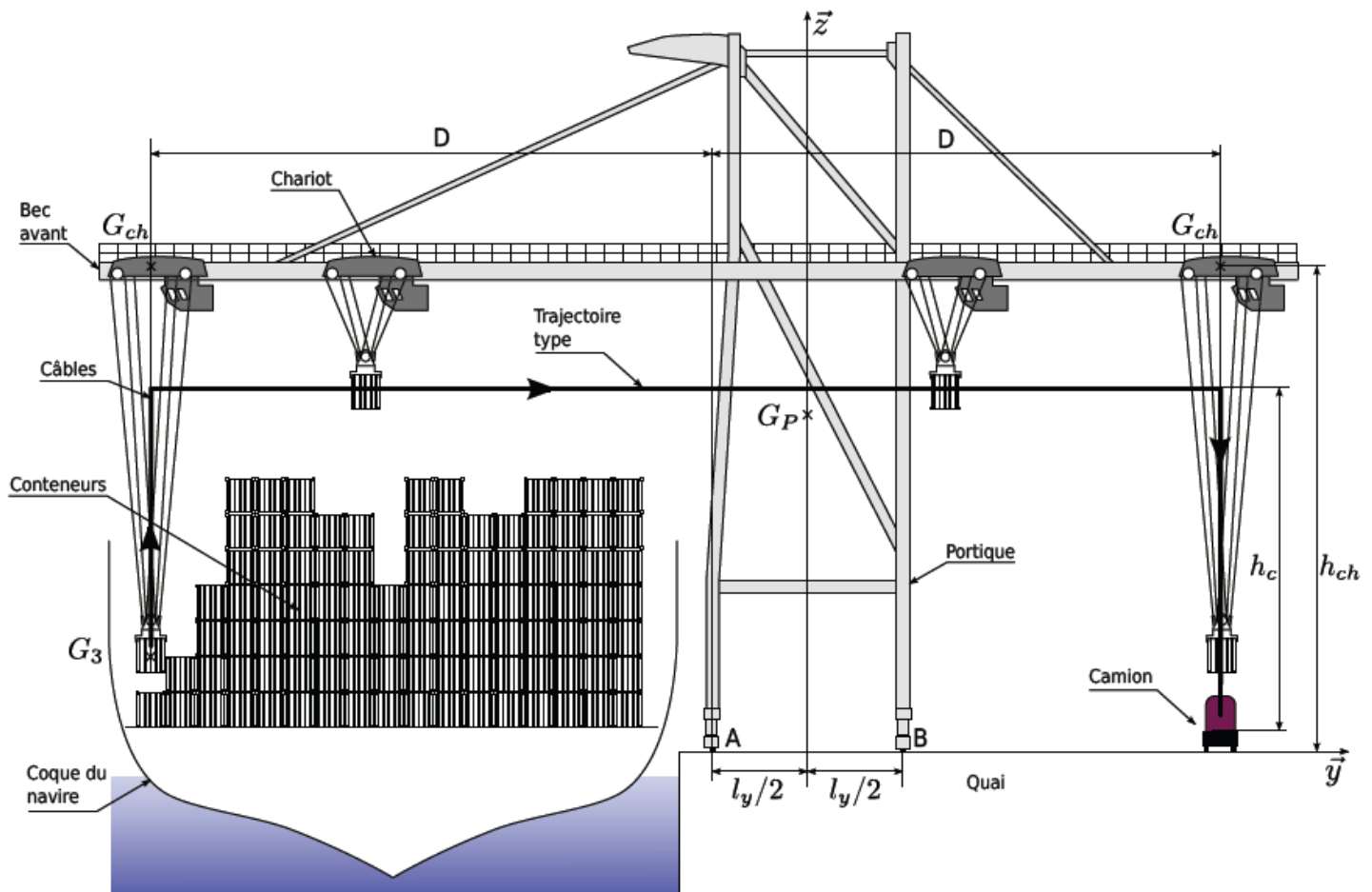
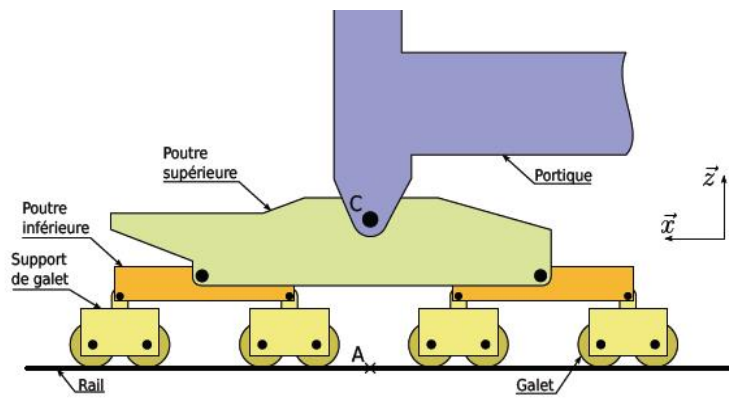


Figure 3 : grue de déchargement des conteneurs



Architecture d'un pied de la grue (chaque disque noir représente une liaison pivot)



Photographie du pied de grue (le tambour supérieur permet l'enroulement du câble d'alimentation 20 000 V)

Figure 4 : pied de grue

Stabilité du portique sur ses appuis

Objectif : Évaluer le risque de basculement lorsque le portique est soumis au vent et lors du levage d'un conteneur.

La forme très élancée du portique présente des risques de basculement lors de la manipulation des conteneurs les plus lourds et par grand vent. Il s'agit de lever ces risques.

Le centre de gravité du portique seul est noté G_P , le centre de gravité du chariot G_{ch} et le centre de gravité de l'ensemble {spreader et conteneur} G_3 .

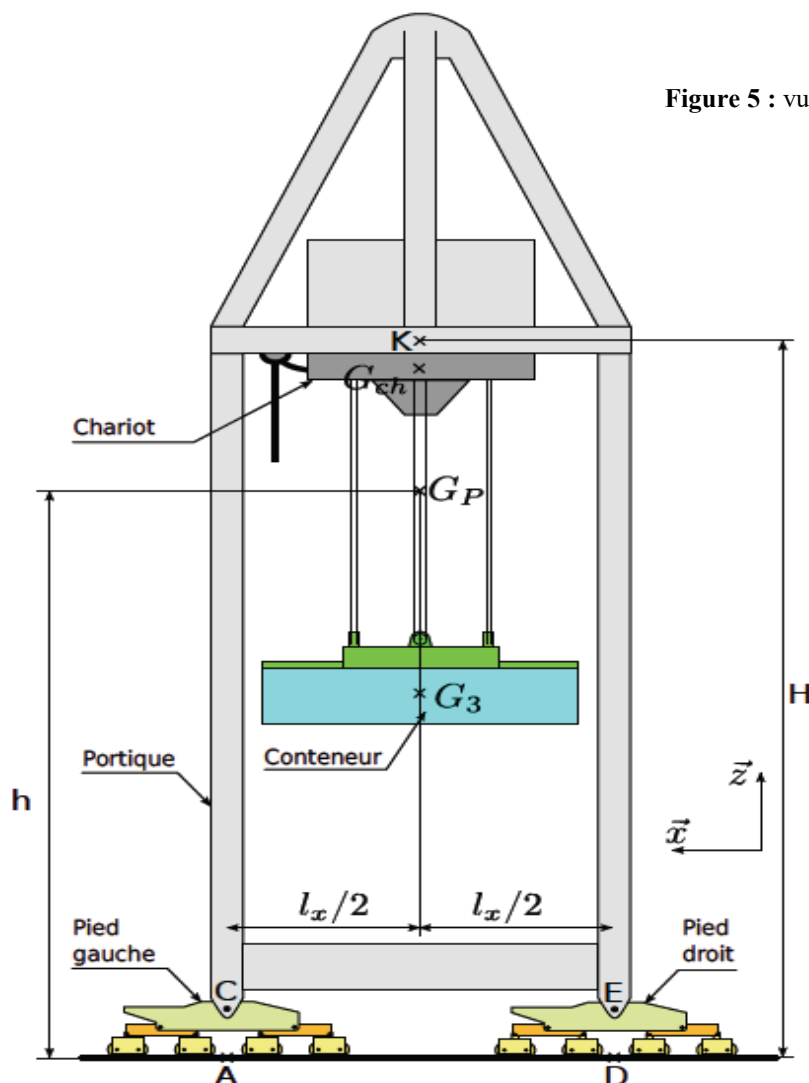


Figure 5 : vue du portique suivant y

$$\begin{aligned} H &= 32 \text{ m} \\ h &= 25 \text{ m} \\ h_c &= 26 \text{ m} \\ l_x &= 17 \text{ m} \\ l_y &= 15 \text{ m} \\ D &= 40 \text{ m} \end{aligned}$$

Q1. Lorsque le chariot est en bout de bec avant (voir figure 3, la distance D vaut 40 m) et que l'on tente de lever la charge maximale, déterminer littéralement, dans le cadre d'un problème plan (dans le plan (y,z) de la figure 3), les efforts dans les contacts rails/portique, modélisés par des liaisons ponctuelles en A et B (supposées sans frottement). Faire les applications numériques.

Donner la condition de non basculement de la grue. Cette condition est-elle vérifiée ?

Q1 bis : (facultatif) dans le cas de la levée de la charge maximale à accélération constante maximale

$\gamma_{lm} = 0,5 \text{ ms}^{-2}$, Déterminer littéralement et numériquement l'action en B. Y a-t-il basculement du portique ?

Quelle est l'accélération de levage maximale que peut subir le conteneur entraînant un début de basculement du portique ?

La grue doit pouvoir se déplacer normalement en translation dans une plage de vents de 0 à 120 kilomètres par heure.

Elle ne doit jamais basculer (vitesse maximale du vent mesurée au cours des 100 dernières années : $300 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$).

La prise au vent latérale est très forte et sera modélisée par une force : $\overrightarrow{F_{vent}} = \frac{1}{2} \lambda V^2 \vec{x}$ appliquée en K (figure 5),

avec $\lambda = 800 \text{ N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}^{-2}$.

Hypothèses :

- le mouvement suivant $\vec{z}$ du conteneur ne sera pas considéré
- le chariot et le portique sont immobiles
- la masse des poutres supérieures, inférieures et des supports de galets est négligeable devant M_p
- sur le modèle plan de la figure 5, les actions du sol sur la grue en A et D sont modélisées par des ponctuelles avec frottement.

Q2. Déterminer littéralement, dans le cadre d'une modélisation dans le plan (x,z) de la figure 5, les **efforts normaux du sol sur la grue** transmis par les pieds « gauche » et « droit », lorsque la grue est soumise au vent.

Q3. En déduire la valeur (en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) de la vitesse de vent V_1 pour laquelle la grue bascule. En déduire la valeur (en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) de la vitesse de vent V_2 pour laquelle la grue glisse, en considérant au contact roue/rail un modèle de frottement sec de coefficient $f = 0,2$.

Les cas les plus défavorables sont-ils obtenus avec ou sans conteneur ?

Vérifier si les deux derniers critères de la fonction FS3 du cahier des charges sont validés, et proposer le cas échéant des solutions techniques.

Problème 4 : Robot Romeo (extrait e3A MP 2014)

1. INTRODUCTION

Présentation du projet Roméo.

Roméo est un projet labellisé par le pôle de compétitivité Cap Digital et financé par la Région Ile-de-France, la Direction Générale de la Compétitivité, de l'Industrie et des Services (DGCIS) et la Ville de Paris.

Il vise à développer un robot humanoïde destiné à devenir un véritable assistant des personnes en perte d'autonomie. Pour cela, il doit être capable d'intervenir sur les objets du quotidien (ouvrir et fermer une porte, manipuler un verre, une bouteille, un trousseau de clés...). Mais il devra également aider une personne à se déplacer à domicile, et même lui porter secours en cas de chute.

Au-delà de ses capacités physiques, Roméo doit offrir une interface homme-machine accessible au plus grand nombre : la voix et les gestes doivent être les principaux moyens de communication avec le robot qui devra être capable de comprendre ce qu'on lui dit, d'entretenir un court dialogue et même de percevoir les intentions et les émotions de son interlocuteur pour en déduire les actions qu'il doit mettre en œuvre.

Un premier prototype de ce robot humanoïde a été développé en mars 2011. La seconde version devrait être opérationnelle courant 2014. À l'issue du projet, Romeo sera évalué auprès de patients de l'Institut de la vision.

Roméo, un robot d'assistance à la personne.

Le challenge est de faire de Roméo, un assistant pour une personne âgée, malvoyante et/ou en perte d'autonomie. Le robot peut aider tout au long de la

journée dans les tâches quotidiennes lorsque la personne est seule. Il peut aller chercher des objets qui se trouvent dans une autre pièce et ranger ceux qui ne sont pas à leur place, et rendre ainsi l'environnement d'une personne mal voyante, par exemple, moins accidentogènes. Roméo peut également être un assistant de mobilité en aidant la personne à marcher ou à se relever de son fauteuil.

Pour être accessible au plus grand nombre, Roméo offre une interface homme-machine très intuitive : il se commande à la voix. Il est capable de dialoguer avec son interlocuteur pour demander des précisions sur ce qu'on attend de lui. Il est également capable d'interpréter des gestes pour illustrer certains ordres.

1.1. Description structurelle

(Voir en annexe 1 : Définition dimensionnelle partielle du robot)

Le prototype en cours de finalisation mesure $1,43m$. Cette petite taille lui permet de limiter son poids à environ $40kg$ (batteries incluses) et donc d'être moins dangereux pour ses propres articulations et pour les personnes qui l'entourent. Ses proportions sont similaires à un individu de corpulence moyenne.

Concernant sa motricité, il est doté de :

- 4 actionneurs au niveau du cou ;
- 6 actionneurs dans chaque jambe ;
- 7 actionneurs dans chaque bras ;
- 1 articulation élastique passive sur chaque pied.

Au total, Roméo est composé de 32 moteurs à courant continu, répartis dans 4 catégories de puissances différentes (11W, 20W, 60W, 150W).

Ses yeux sont aussi motorisés afin de modifier leurs orientations et ainsi augmenter leur champ visuel. Un projet de colonne vertébrale est à l'étude pour améliorer la flexibilité posturale de Roméo.

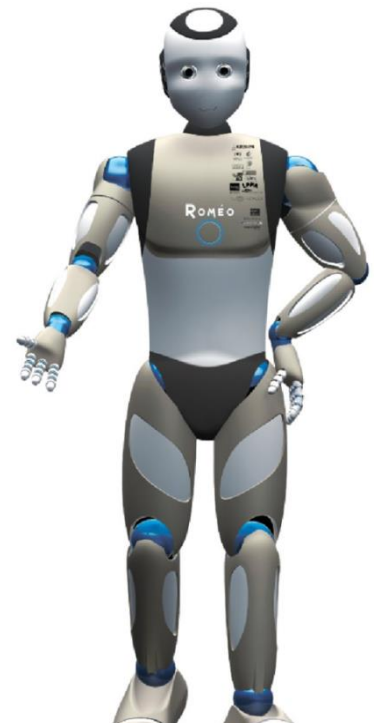


Figure 1 : Robot ROMEO, développé par la société ALDEBARAN ROBOTICS

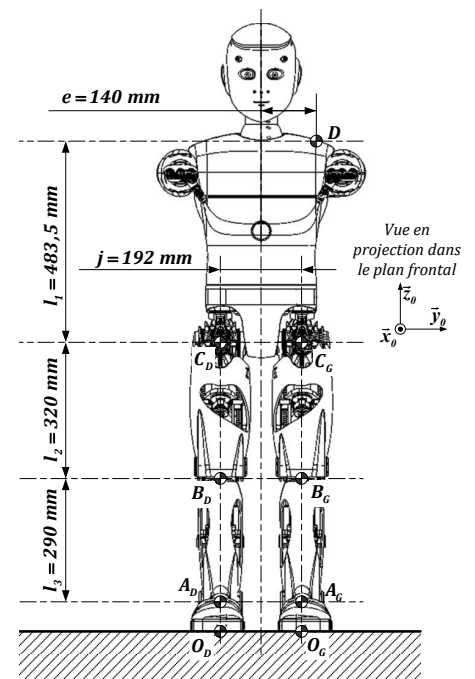


Figure 2 : Dimensions frontales

1.2. Scénario proposé

Nous allons étudier le robot dans une phase d'assistance spécifique qui consistera à aider une personne à se lever de sa chaise. Le protocole se décomposera de la façon suivante.

- La personne émet un appel vocal ou électronique du robot.
- Roméo se rapproche et se positionne correctement pour aider la personne.
- Roméo adapte la hauteur de son épaule grâce à une gènesflexion.
- La personne pose une main sur l'épaule de Roméo pour s'aider de cet appui.
- Roméo contrôle ses articulations pour assurer son équilibre tout en soutenant l'effort de la personne.
- La personne lâche l'épaule du robot quand elle est levée.
- Roméo s'écarte de la personne tout en assurant sa sécurité.

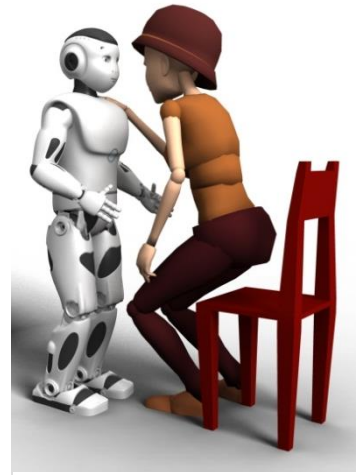
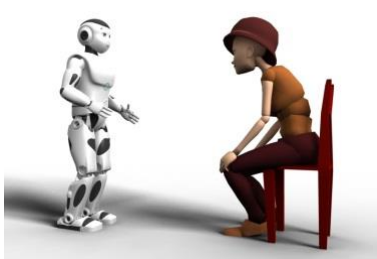
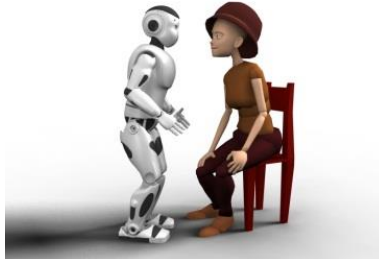


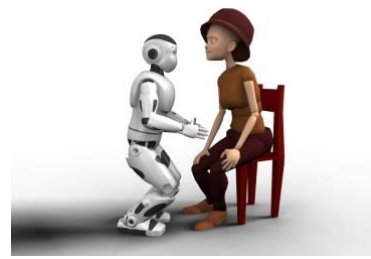
Figure 3 : Scénario d'assistance pour relever une personne



La personne émet un appel vocal ou électronique du robot



Roméo se rapproche et se positionne correctement pour aider la personne



Roméo adapte la hauteur de son épaule grâce à une gènesflexion



La personne pose une main sur l'épaule de Roméo pour s'aider de cet appui



Roméo contrôle ses articulations pour assurer son équilibre tout en soutenant l'effort de la personne



Figure 4 : Étapes du scénario d'assistance pour relever une personne

1.3. Extrait du cahier des charges fonctionnel

Exigences	Formulation	Critères	Niveaux
Ex1	Aider le patient à se lever de sa chaise	Poids de la personne Temps d'exécution	$< 100 \text{ Kg}$ $< 30 \text{ s}$
Ex2	S'adapter et protéger l'environnement	Largeur de passage	$> 80 \text{ cm}$
		Eco-conception	CO_2 minimum Consommation minimale
Ex3	S'adapter au mobilier environnant	Reconnaissance visuelle de l'encombrement de la chaise	$\pm 2 \text{ cm}$
Ex4	Charger sa batterie de manière autonome	Alimentation sur secteur	$230 \text{ V} \sim$ $< 15 \text{ A}$
Ex5	Communiquer avec le personnel médical	Dialogue vocal en français Dialogue via Smartphone ou tablette	

Figure 5 : Extrait du cahier des charges fonctionnel

1.4. Caractérisation des exigences techniques

Exigence technique	Critère	Niveau	Flexibilité
Ex1.1 : Permettre à la personne d'atteindre facilement l'épaule du robot avec sa main droite ou gauche	Distance optimisée vers l'avant (origine : épaule de la personne)	200 mm	2
	Distance optimisée sur le côté (origine : épaule de la personne)	200 mm	2
	Distance optimisée vers le haut (origine : sol)	900 mm	1
Ex1.2 : Supporter l'effort vertical exercé par la personne qui veut se lever d'un siège	Effort maximum	$< 100 \text{ N}$	1
	Maintien de la position sous charge (variation de hauteur du point d'appui)	$< 5 \text{ mm}$	2
	Dépassement de position face à un échelon de sollicitation	$< 5\%$	2
	Temps de maintien d'un effort supérieur à 1N	$< 10 \text{ s}$	2
Ex1.3 : Monter l'épaule d'appui afin d'aider la personne à se lever	Temps de montée maximal	15 s	2
	Temps de montée minimal	10 s	2
	Élévation nécessaire	$< 150 \text{ mm}$	2

Figure 6 : Extrait du cahier des charges fonctionnel ; caractérisation des fonctions techniques

2. ETUDE DU CAHIER DES CHARGES FONCTIONNEL

La personne qui désire se lever est initialement en position assise. Elle positionne sa main droite ou sa main gauche sur l'épaule du robot ($0,9$ à $1,1 \text{ m}$ de haut) puis exerce un effort vertical sur celle-ci afin d'aider ses membres inférieurs.

Afin d'établir la valeur de l'effort que devra supporter le robot pour assister la personne qui se relève, une série d'expériences est réalisée avec des personnes âgées. Un capteur de force monoaxial enregistre au cours du temps l'effort vertical qu'exerce la personne sur un support fixe représentant l'épaule du robot (voir exemple d'enregistrement d'essai en annexe 1).

Q1. Afin de choisir le capteur de force nécessaire à cette campagne de mesures, donner un ordre de grandeur de l'étendue de mesures nécessaire, ainsi qu'un ordre de grandeur de la précision requise.

L'étude qui suit porte sur la détermination des couples des moteurs installés dans les articulations des jambes du robot.

Un paramètre important est aussi la durée des couples d'application exercés par les moteurs : de ces temps de maintien dépendra l'échauffement des moteurs et donc la fiabilité du robot.

Q2. À partir d'un enregistrement de l'effort de relèvement en fonction du temps (simulé lors d'une expérience), donné en annexe 1, déterminer graphiquement le temps de maintien d'un effort supérieur à 10 N associée à cette courbe. Est-ce cohérent vis-à-vis du cahier des charges ?

3. VALIDATION DU CRITERE DE NON BASCULEMENT : exigence Ex1.2

Il est important de vérifier que le robot pourra réaliser le scénario proposé en s'assurant qu'il ne basculera pas suite à l'appui de la personne sur l'épaule.

Dans cette étude statique, on suppose toutes les articulations bloquées : les moteurs fournissent les couples de maintien nécessaires.

On propose le modèle simplifié, plan, de la **figure de l'annexe 2** : le robot (ensemble(E)) est en équilibre, les deux pieds en appui sur le sol auquel est associé un référentiel supposé galiléen.

- Les liaisons pieds / sol sont modélisées par deux liaisons sphère-plan (ou ponctuelles) parfaites aux points O_D et O_G (Droit et Gauche).
- L'effort de la personne sur le robot est modélisé par une force verticale $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$ appliquée au point D situé sur l'épaule comme défini par la figure de l'annexe 2 : $\overrightarrow{OD} \cdot \vec{y}_0 = e = 140 \text{ mm}$.
- La gravité exerce une force verticale $\vec{P} = -Mg \cdot \vec{z}_0$ appliquée au centre de masse G du robot.
- Le point O est situé à égale distance des deux pieds : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OG} = d \cdot \vec{y}_0$.

Notation : Pour la suite de l'étude, le torseur modélisant les actions transmissibles du solide j sur le solide i par la liaison de centre A, exprimé dans le repère $R_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$, s'écrit :

$$T\{j \rightarrow i\} = \left\{ \begin{array}{l} X_{ji} \cdot \vec{x}_k + Y_{ji} \cdot \vec{y}_k + Z_{ji} \cdot \vec{z}_k \\ L_{ji} \cdot \vec{x}_k + M_{ji} \cdot \vec{y}_k + N_{ji} \cdot \vec{z}_k \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{ji} \\ Y_{ji} \\ Z_{ji} \end{array} \middle| \begin{array}{l} L_{ji} \\ M_{ji} \\ N_{ji} \end{array} \right\}_{A, R_k}$$

Q3. Dans le cas considéré (annexe 2), sur quel pied (droit ou gauche) le basculement est-il possible ?

Q4. Écrire les expressions de tous les torseurs modélisant les actions mécaniques extérieures appliquées au robot (E) isolé.

Q5. Justifier que le principe fondamental de la statique s'applique puis écrire le théorème de la résultante statique en projection selon $\vec{z}_0$.

Q6. Proposer puis écrire une autre équation scalaire issue du principe fondamental de la statique permettant de déterminer l'expression de la composante du torseur de l'action mécanique du sol (0) sur le pied gauche en fonction de F, M, g, d et e. Justifier.

Q7. Dédurre des questions précédentes l'expression de la composante du torseur de l'action mécanique du sol (0) sur le pied gauche en fonction de F, M, g, d et e.

Pour vérifier le respect du critère de non-basculement du robot, il faut que les contacts en O_G et O_D respectent toujours la contrainte d'unilatéralité : le sol ne peut exercer qu'un effort de réaction vertical ascendant sous chacun des pieds.

Q8. Écrire l'inégalité qui découle du respect de ce critère.

Q9. Quel est l'effort maximum qui peut être exercé sur le robot au point D , tout en assurant la condition de non-basculement ? Conclure quant au respect du cahier des charges.

4. VALIDATION STATIQUE DU CRITERE DE MAINTIEN EN POSITION DE GENUFLEXION : exigence Ex1.2

L'articulation du genou est particulièrement sollicitée lorsque le robot a les genoux fléchis. La personne qui s'appuie sur l'épaule augmente le couple nécessaire au niveau des genoux pour maintenir une posture stable du robot. Il est nécessaire d'estimer ce couple dans la position la plus défavorable et de vérifier si le robot et ses moteurs pourront supporter une telle charge.

Pour établir une estimation de ce couple, on isole le sous-ensemble $E_{12} = \{1,2\}$ (voir **modèle plan proposé en annexe 3**).

On note G_{12} le centre de masse du sous-ensemble $E_{12} = \{1,2\}$ et M_{12} sa masse. $M_{12} = 32 \text{ kg}$.

Pour les applications numériques, on prendra g (accélération de la pesanteur) tel que $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

On suppose que le robot est en position limite d'équilibre : seule la jambe gauche est sollicitée et le pied droit du robot est à la limite du décollement.

La force exercée par le patient sur le robot est modélisée par un glisseur de résultante $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$ appliqué au point D .

L'inclinaison du torse (vers l'avant) est de $\theta_{10} = 10^\circ$.

L'étude est menée pour la position de genuflexion maximale du scénario envisagé, soit pour une cote du point D de $Z_D = \overrightarrow{OD} \cdot \vec{z}_0 = 900 \text{ mm}$.

On note C_{32} le couple qu'exerce le tibia (3) sur la cuisse (2) permettant le maintien de la posture.

Les points D et G_{12} sont supposés, dans ce modèle plan, à l'aplomb des articulations de la cheville.

Dans cette partie, on suppose l'étude modélisable dans le plan de projection sagittal ($\vec{x}_0, \vec{z}_0$) : **ETUDE PLANE**.

Les données géométriques sont précisées sur le document annexe 3.

Q10. À l'aide d'une étude statique dans le plan sagittal, donner l'expression littérale du couple C_{32} nécessaire au niveau du genou pour maintenir cette posture sous charge en fonction de $\mathbf{l}_3$, θ_{43} , $\mathbf{F}$ et $\mathbf{M}_{12} \cdot \mathbf{g}$. On précisera et justifiera l'équation scalaire utilisée.

On adoptera pour la suite de l'étude la valeur suivante $C_{32} = 85 \text{ N.m}$.

Ce couple C_{32} est créé par le motoréducteur implanté dans l'articulation du genou. On donne :

- moteurs de référence **Maxon RE40 148877** (voir documentation technique en annexe 5) ;
- rapport de transmission du réducteur : $r_{32} = \left| \frac{\omega_m}{\omega_{32}} \right| = 95,91$;
- rendement du réducteur supposé unitaire : $\eta = 1 = \frac{\text{Puissance en sortie}}{\text{Puissance reçue}} = \frac{C_{32} \cdot \omega_{32}}{C_m \cdot \omega_m}$.

Q11. Calculer le couple délivré par le moteur et le comparer au couple de calage (stall torque en anglais) indiqué dans la documentation. Conclure quant à la capacité du robot à rester en position de genuflexion face au patient qui est en appui sur son épaule.

5. VALIDATION DYNAMIQUE DU CRITERE DE MAINTIEN EN POSITION DE GENUFLEXION : Exigence Ex 1.2

On veut à présent étudier la rigidité du robot face au couple résistant dû à l'appui du patient sur son épaule : lorsque le patient sollicite le robot pour se relever, le robot ne doit pas s'affaisser.

Dans le cahier des charges, cela se traduit par :

Maintien de la position sous charge (variation de hauteur du point d'appui)	$< 5 \text{ mm}$	Flexibilité : 2
Dépassement de position face à un échelon de sollicitation	$< 5\%$	Flexibilité : 2

On supposera que la variation de hauteur du point d'appui est sensiblement la variation de hauteur d'un point de la hanche (point C sur la figure annexe 3).

Description de la commande du moteur (voir figure 7 : Modèle de commande de mouvement du genou)

Pour que le robot puisse prendre une posture conforme à celle demandée par le cahier des charges, il faut un positionnement suffisamment précis des diverses articulations, et en particulier de celle du genou.

Cette position doit pouvoir être maintenue sous l'action de charges extérieures, comme l'appui du patient sur l'épaule de Roméo dans le cas du scénario proposé à l'étude.

Il faut donc que la commande du moteur du genou soit suffisamment précise et robuste, ce qui impose un asservissement de position angulaire.

Lors de la phase de relevée du patient, le mouvement ascensionnel découle des mouvements articulaires Hanche, Genou et Cheville. Les mouvements doivent donc être synchronisés en position mais aussi en vitesse pour limiter les erreurs de trainage, ce qui impose un asservissement en vitesse.

Enfin, l'équilibre dynamique demande à ce que les accélérations des diverses articulations, les efforts et les intensités électriques dans les moteurs soient bien maîtrisées ce qui impose un asservissement en intensité.

La figure 7 montre le schéma-bloc représentant un modèle simplifié de la commande de mouvement du genou.

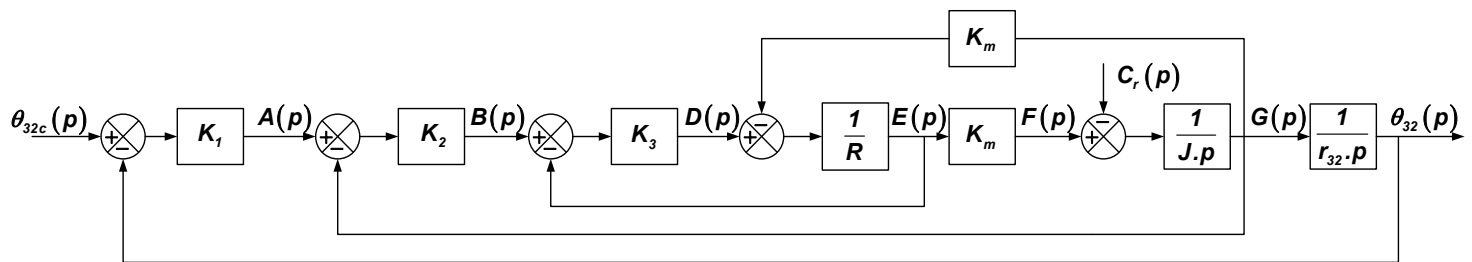


Figure 7 : Modèle de commande du genou

- Entrée : consigne de variation de position angulaire du genou θ_{32c} (variation par rapport à une position de référence θ_{32-0})
- Sortie : variation de position angulaire du genou θ_{32} , relativement à θ_{32-0} .
- Perturbation : couple résistant C_r (dû aux actions de la pesanteur, aux actions du patient sur le robot...)
- Inertie équivalente, supposée constante, ramenée à l'arbre moteur : J
- Résistance de l'induit du moteur : R
- Constante de couple du moteur : K_m
- Rapport de réduction de la chaîne cinématique : $r_{32} = \frac{\omega_m}{\omega_{32}} = \frac{\dot{\theta}_m}{\dot{\theta}_{32}}$

Comme tous les axes commandés du robot, le moteur du genou est contrôlé en position, en vitesse et en intensité par trois capteurs (de position, vitesse et courant) associés à trois correcteurs proportionnels dont les gains sont notés respectivement K_1 , K_2 et K_3 .

Q12. Que représentent les variables $\mathbf{d(t)}$ ($\mathbf{D(p)}$ dans le domaine de Laplace), $\mathbf{e(t)}$ ($\mathbf{E(p)}$ dans le domaine de Laplace), $\mathbf{f(t)}$ ($\mathbf{F(p)}$ dans le domaine de Laplace), et $\mathbf{g(t)}$ ($\mathbf{G(p)}$ dans le domaine de Laplace) qui apparaissent dans le schéma-bloc de la figure 7 ? Quelles sont leurs unités (système international) ?

Q13. À partir du schéma-bloc, exprimer :

- $\theta_{32}(p)$, la variation angulaire de sortie, en fonction du couple résistant $C_r(p)$ et de la variable intermédiaire $F(p) \Rightarrow$ Équation notée (1)
- $F(p)$ en fonction de $D(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ Équation notée (2)
- $D(p)$ en fonction de $B(p)$ et de $F(p) \Rightarrow$ Équation notée (3)

Q14. De même, exprimer :

- $B(p)$ en fonction de $A(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ Équation notée (4)
- $A(p)$ en fonction de $\theta_{32c}(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ Équation notée (5)

On suppose que le Robot est en gèneuflexion, face au patient (position angulaire de référence du genou θ_{32-0}), prêt à recevoir l'action du patient.

Le couple résistant total sur l'arbre moteur est alors dû :

- à l'action du patient sur l'épaule du robot : $C_{rp}(p)$ et dans le domaine temporel $c_{rp}(t)$;
- au poids propre du robot : $C_{rg}(p)$ et dans le domaine temporel $c_{rg}(t)$.

Le couple résistant total est donc $c_r(t) = c_{rp}(t) + c_{rg}(t)$ et dans le domaine de Laplace :

$$C_r(p) = C_{rp}(p) + C_{rg}(p).$$

On modélise l'action du patient sur l'épaule du Robot par un échelon de couple $c_{rp}(t) = c_{rp} \cdot u(t)$ où la fonction $u(t)$ est la fonction de Heaviside.

Puisque l'on veut extraire de l'étude la seule influence de l'action du patient sur le robot, le théorème de superposition réduit l'étude au modèle suivant (figure 8).

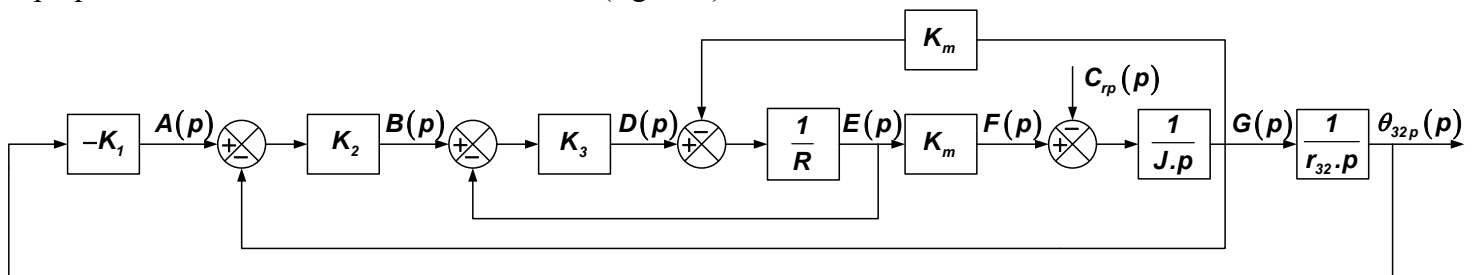


Figure 8 : Modèle de comportement du genou

Q15. Que représente précisément la grandeur $\theta_{32p}(t)$ ($\theta_{32p}(p)$ dans le domaine de Laplace)? Réécrire l'équation (5) dans le cas de l'étude proposée : seule l'influence de l'action du patient sur le robot est recherchée.

Q16. À partir des équations (4) et (5), déterminer l'expression de $B(p)$ en fonction de $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ Équation notée (6).

Q17. À partir des équations (6) et (3), déterminer l'expression de $D(p)$ en fonction de $F(p)$ et de $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ Équation notée (7).

Q18. À partir des équations (7) et (2) déterminer l'expression de $F(p)$ en fonction de $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ Équation notée (8).

Q19. Finalement, montrer que l'expression de $\theta_{32p}(p)$ en fonction de $C_{rp}(p)$ peut s'écrire sous la forme

$$\theta_{32p}(p) = \frac{\alpha}{1 + \beta \cdot p + \gamma \cdot p^2} C_{rp}(p)$$

Préciser les expressions de α , β et γ en fonction des diverses constantes.

On choisit les gains K_1 , K_2 et K_3 égaux à 100 (USI).

On pose l'inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur : $J = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Les valeurs numériques de la résistance aux bornes du moteur (*terminal resistance*, en anglais dans la documentation) et de la constante de couple (*torque constant*, en anglais dans la documentation) sont indiquées en annexe 4 dans la documentation moteur.

On rappelle que le rapport de réduction est : $r_{32} = 95,91$.

Q20. Calculer la valeur numérique du gain α de la fonction de transfert $\frac{\theta_{32p}(p)}{C_{rp}(p)}$ en précisant les unités.

Pour la suite de l'étude, on prendra (valeurs données en unité du système international) :

$$\theta_{32p}(p) = \frac{-1,7 \cdot 10^{-3}}{1 + 0,960 \cdot p + 2,25 \cdot 10^{-6} \cdot p^2} C_{rp}(p)$$

Q21. Calculer la valeur numérique du coefficient d'amortissement de cette fonction de transfert. Commenter ce résultat en s'appuyant sur les exigences du cahier des charges.

Pour la question suivante, on considère les deux items ci-après.

- La personne pose sa main et exerce un effort de 100 N ce qui induit un couple C_{rp} estimé à $C_{rp} = 1 \text{ N.m}$ (valeur surestimée, proche de celle déterminée lors de la vérification du couple de calage).
- Cette sollicitation induit alors une rotation de l'articulation du genou $\delta\theta_{32}$. C'est la variation angulaire de l'articulation du genou due seulement à l'appui du patient sur le robot.

Q22. Calculer la variation angulaire au niveau du genou $\delta\theta_{32}$ induite par cette perturbation. On donnera le résultat en degré.

On suppose que la position initiale avant appui du patient est proche de celle décrite par la figure de l'annexe 3 et par les données géométrique suivantes :

- $l_2 = 320 \text{ mm}$;
- $\theta_{21} = -63^\circ$ et $\theta_{10} = 0^\circ$, soit une inclinaison de la cuisse par rapport à la verticale de 63° .

Le cahier des charges précise que le maintien de la position sous charge (variation de hauteur du point d'appui qui est sensiblement la variation de hauteur de la hanche) doit être inférieur à 5 mm .

Q23. L'influence de cette perturbation est-elle compatible avec les exigences du cahier des charges ? Quel type de correction pourrait être envisagé pour annuler cette influence ?

6 . VALIDATION DES CAPACITES DYNAMIQUES : Exigence technique ex1.3

L'objectif de cette partie est de vérifier les performances du robot pour assurer l'exigence technique ex1.3 "Monter l'épaule d'appui afin d'aider la personne à se lever".

Le moteur doit être capable de tourner suffisamment vite pour accompagner le patient dans son mouvement. Le couple de démarrage du moteur (valeur donnée par le constructeur) doit être suffisamment élevé pour assurer la mise en mouvement sous charge et donc les accélérations des solides constituant le robot.

Rappel de l'extrait du cahier des charges : temps de montée $10\text{s} < t_m < 15 \text{ s}$.

Le constructeur du robot donne les rapports de réduction de chacune des chaînes cinématiques des articulations de la jambe du robot. Elles sont actionnées par un moteur identique : **Maxon RE40 148877** (voir documentation technique en annexe 4).

Articulation		Cheville	Genou	Hanche
Nom de l'angle		θ_{43}	θ_{32}	θ_{21}
Ref. moteur		Maxon RE40 148877		
Rapport de réduction	$r = \frac{\omega_{\text{moteur}}}{\omega_{\text{articulation}}}$	$r_{43} = 117,07$	$r_{32} = 95,91$	$r_{21} = 117,07$

On suppose toujours le cas limite d'équilibre : seule la jambe gauche est sollicitée et le pied droit du robot est à la limite du décollement. On admet alors le modèle plan proposé, figure 10.

Le constructeur a adopté, pour le pilotage de tous les moteurs du robot, une loi d'évolution de vitesse parabolique (voir figure 9, pour une rotation positive).

On suppose, dans cette partie, que la commande des moteurs est suffisamment robuste pour que cette loi de commande soit effective : temps de réponse faible, erreur de trainage faible, pas de retard pur ...

L'équation de cette loi de vitesse est donc :

$$\dot{\theta}_m(t) = -\frac{4 \cdot \omega_0}{t_1^2} \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)^2 + \omega_0$$

Avec :

$|\omega_0|$: la fréquence de rotation maximale commandée
($\omega_0 = \text{cst}$, pour un déplacement donné)

$\omega_0 > 0$ pour une rotation positive : $\dot{\theta}_m(t_1) > 0$

$\omega_0 < 0$ pour une rotation négative : $\dot{\theta}_m(t_1) < 0$

t_1 : la durée du mouvement commandé ($t_1 = \text{cst}$, pour un déplacement donné)

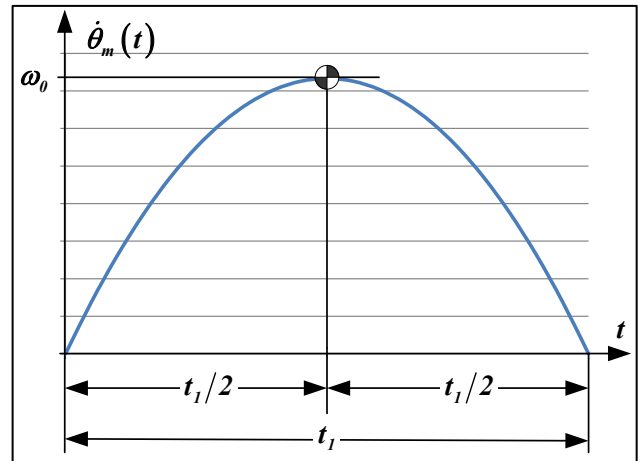


Figure 9 : Loi d'évolution de la vitesse de rotation du moteur en fonction du temps.

L'accélération angulaire maximale du moteur, pour cette loi de commande, est notée $\ddot{\theta}_{Max}$ telle que :

$$\ddot{\theta}_{Max} = \max(|\ddot{\theta}_m(t)|) \text{ pour } 0 \leq t \leq t_1$$

Q24. À partir de l'équation temporelle de la loi de commande, donner l'expression de l'accélération angulaire maximale $\ddot{\theta}_{Max}$ en fonction de $|\omega_0|$ et t_1 .

On pose : $\theta_m(t=0) = 0$.

Q25. Déterminer l'expression de $\theta_m(t)$, rotation du moteur au cours d'une phase de fonctionnement, en fonction du temps t et des paramètres ω_0 et t_1 . En déduire l'expression de $\Delta\theta_m = \theta_m(t_1) - \theta_m(t=0)$, la rotation du moteur pour une phase complète de fonctionnement.

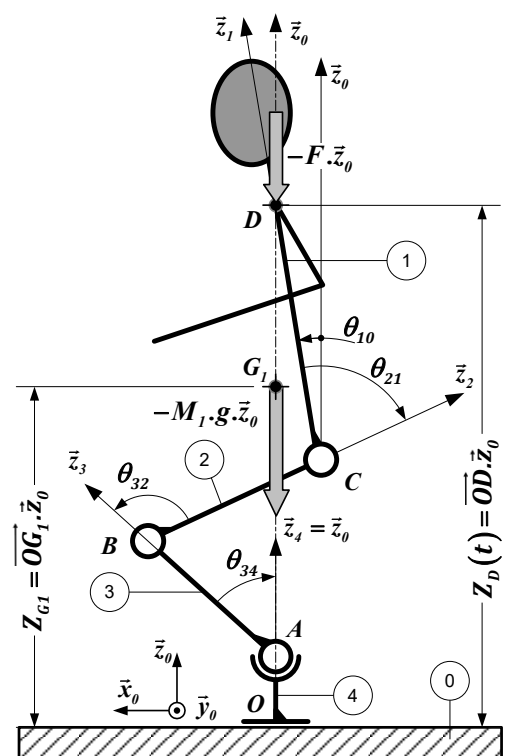
Au cours de cette phase de fonctionnement, si la rotation du moteur est $\Delta\theta_m$, la rotation de l'articulation du genou correspondante est $\Delta\theta_{32}$.

Q26. En considérant le rapport de réduction r_{32} , donner l'expression de ω_0 en fonction de $\Delta\theta_{32}$, t_1 et r_{32} .

Avec cette loi parabolique, on veut que le robot se relève en 10 secondes. On suppose que le débattement angulaire est $\Delta\theta_{32} = -40^\circ$.

Q27. Calculer la vitesse de rotation maximale $\Omega_0 = |\omega_0|$ à programmer pour réaliser ce relèvement en 10 secondes et pour une amplitude de mouvement du genou de -40° . Vérifier que la vitesse de rotation nominale (Nominal speed, en anglais dans la documentation) n'est pas dépassée.

Q28. Calculer l'accélération angulaire maximale $|\ddot{\theta}_{32Max}|$ de l'articulation du genou.



Cette accélération, induisant des effets d'inertie, conduit à la vérification du couple de démarrage du moteur (*Stall torque*, en anglais dans la documentation).

Cette vérification est menée grâce à une étude dynamique sur le sous-ensemble $E = \{1,2,3,4\}$ puis sur (1).

On propose le modèle simplifié, plan, présenté figure 10.

L'inclinaison du torse est $\theta_{10} = \text{cst} = 10^\circ$.

Le robot est constitué :

- du solide (1) : tronc du robot + tête + deux bras + jambe droite, de masse M_1 ;
- du solide (2) : cuisse gauche. La masse de (2) et les inerties sont négligées ;
- du solide (3) : tibia gauche. La masse de (3) et les inerties sont négligées ;
- du solide (4) : pied gauche. La masse de (4) et les inerties sont négligées.

Rappel : On suppose toujours le cas limite d'équilibre : Seule la jambe gauche est sollicitée et le pied droit du robot est à la limite du décollement. La jambe droite, pilotée par ces propres moteurs, n'influence pas la dynamique du cas étudié.

Figure 10 : Modèle cinématique plan, en projection dans le plan sagittal $(\vec{x}_0, \vec{z}_0)$ - Robot en genuflexion

On note $\dot{Z}_D(t)$, la vitesse ascensionnelle du tronc du robot : $\dot{Z}_D(t) = \frac{d}{dt} Z_D(t)$.

Efforts jouant un rôle significatif dans l'étude dynamique :

➤ Les motoréducteurs induisent des efforts dans les articulations en A , B et C .

- En C , entre les solides (1) et (2) : motoréducteur de hanche qui induit un effort modélisé par le torseur :

$$\circ T\{1 \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{O} \\ C_{12} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_C \text{ (effort intérieur à } E = \{1,2,3,4\} \text{)}$$

- En B , entre les solides (2) et (3) : motoréducteur de genou qui induit un effort modélisé par le torseur :

$$\circ T\{2 \rightarrow 3\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{O} \\ C_{23} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{O} \\ -C_{32} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B \text{ (effort intérieur à } E = \{1,2,3,4\} \text{)}$$

- En A , entre les solides (3) et (4) : motoréducteurs de cheville qui induit un effort modélisé par le torseur :

$$\circ T\{3 \rightarrow 4\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{O} \\ C_{34} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_A \text{ (effort intérieur à } E = \{1,2,3,4\} \text{)}$$

➤ Effort du patient sur le robot :

On suppose que le patient qui demande assistance, exerce une force verticale descendante de module F , au point D . Malgré la dissymétrie induite par cette force, on conserve un modèle plan. Lors du mouvement étudié, le point D reste sur la verticale $(A, \vec{z}_0)$.

$$T\{\text{patient} \rightarrow 1\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{O} \end{array} \right\}_D$$

➤ Effort de pesanteur :

Pour simplifier l'étude, on suppose que le centre de masse G_1 du solide (1), est toujours sur la verticale $(A, \vec{z}_0)$. On a alors $\vec{V}(G_1, 1/0) = \vec{V}(D, 1/0) = \dot{Z}_D(t) \cdot \vec{z}_0$, ce qui conduit à dire que le mouvement du solide (1) est une translation rectiligne, de direction $\vec{z}_0$.

Les poids des autres solides sont négligés.

$$T\{\text{poids} \rightarrow 1\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{O} \end{array} \right\}_{G_1}$$

➤ Effort du sol sur le robot :

Le pied est en appui plan sur le sol. L'effort transmissible par cette liaison est modélisable par le torseur suivant :

$$T\{0 \rightarrow 4\} = \left\{ \begin{matrix} Z_{04} \cdot \vec{z}_0 \\ M_{04} \cdot \vec{y}_0 \end{matrix} \right\}_O$$

➤ On suppose toutes les liaisons parfaites.

L'application du théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble E (programme 2^{ième} année) donne l'équation différentielle suivante :

$$M_1 \cdot \dot{Z}_D \cdot \ddot{Z}_D = -F \cdot \dot{Z}_D - M_1 g \cdot \dot{Z}_D + C_{12} \cdot \dot{\theta}_{21} - C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32} + C_{34} \cdot \dot{\theta}_{43} \quad (i)$$

Q29. Quel (ensemble de) solide(s) faut-il isoler pour déterminer le couple C_{12} ? Préciser le théorème, l'éventuel point d'application et la direction de projection permettant d'écrire l'équation scalaire utile.

On obtient l'équation suivante :

$$-M_1 \cdot l_1 \cdot \ddot{Z}_D \cdot \sin \theta_{10} = (F + M_1 \cdot g) \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} + C_{21} \quad (ii)$$

Une étude dynamique sur le pied (4) montre que :

$$|C_{43} \cdot \dot{\theta}_{43}| \ll |C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32}|$$

Q30. En utilisant les équations (i) et (ii), retrouver l'équation différentielle suivante :

$$M_1 \cdot \dot{Z}_D(t) \cdot \ddot{Z}_D(t) = -(M_1 \cdot g + F) \cdot \dot{Z}_D(t) + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot \left(M_1 \cdot (g + \ddot{Z}_D(t)) + F \right) \cdot \dot{\theta}_{21} - C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32} \quad (*)$$

La première figure de l'annexe 4 fait apparaître que les lois d'évolution des angles θ_{21} , θ_{32} et θ_{43} sont quasiment proportionnelles à la vitesse d'élévation du tronc (linéarisation des lois d'évolution).

On peut donc écrire (vitesse angulaire en $rad \cdot s^{-1}$ et vitesse en $m \cdot s^{-1}$) :

$$\dot{\theta}_{32} = -5 \cdot \dot{Z}_D \quad \dot{\theta}_{21} = +2,5 \dot{Z}_D = -0,5 \cdot \dot{\theta}_{32} \quad \dot{\theta}_{43} = +2,5 \dot{Z}_D = -0,5 \cdot \dot{\theta}_{32}$$

Q31. En utilisant les lois linéarisées des lois de vitesse et leur dérivée par rapport au temps, en utilisant l'expression (*) donnée, déduire l'expression du couple C_{32} en fonction de M_1 , F , l_1 , θ_{10} et $\ddot{\theta}_{32}$. On mettra cette relation sous la forme $C_{32} = A \cdot \ddot{\theta}_{32} + B$ et on identifiera A et B

Une application numérique avec $M_1 = 25 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $F = 100 \text{ N}$, $\theta_{10} = 10^\circ$ et $l_1 = 480 \text{ mm}$ conduit à l'évaluation des grandeurs A et B .

Pour la suite de l'étude, on prendra donc : $A = -0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ et $B = 55 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

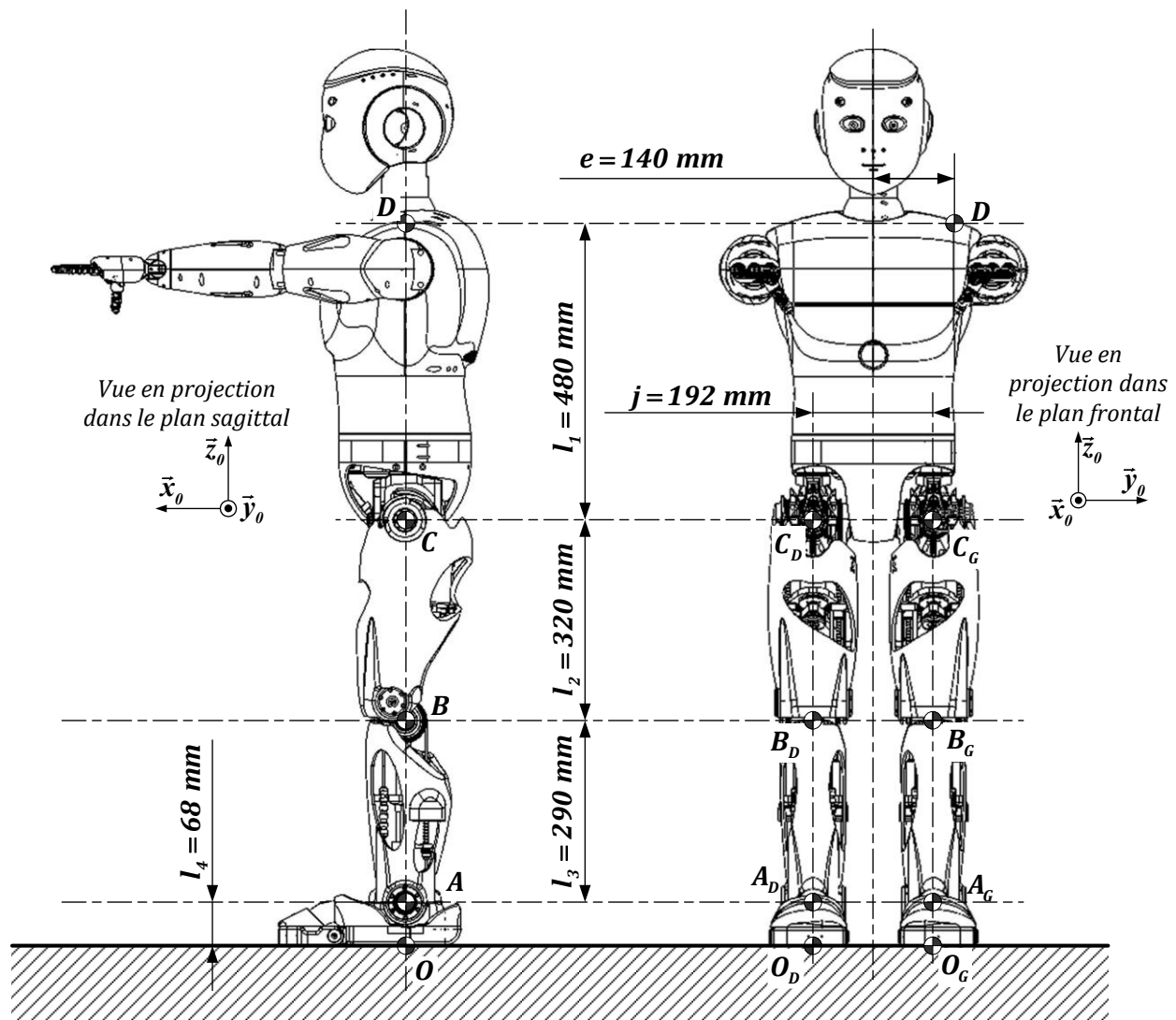
Le document constructeur relatif au moteur utilisé dans la chaîne d'énergie de cette articulation donne le couple de démarrage du moteur (*Stall torque*, en anglais dans la documentation).

On rappelle que le rapport de réduction du motoréducteur du genou est $r_{32} = 95,91$ et que son rendement est unitaire.

Pour réaliser l'application numérique on prendra $|\ddot{\theta}_{32 \text{Maxi}}| = 0,04 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$, valeur maximale de l'accélération angulaire.

Q32. Vérifier que le moteur est correctement dimensionné du point de vue du couple de démarrage.

ANNEXE 1 : Définition dimensionnelle partielle du robot

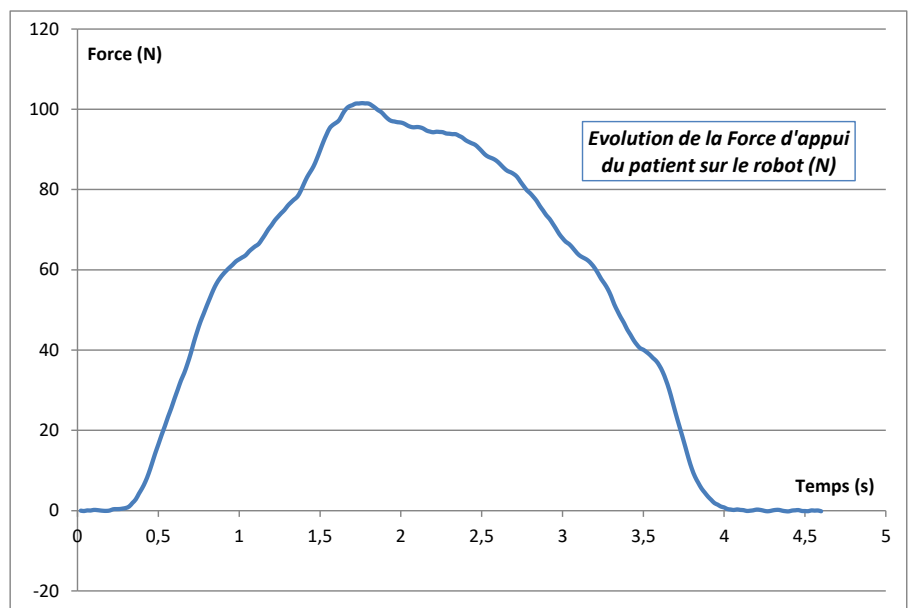


Document extrait du document constructeur : définition dimensionnelle partielle du robot.

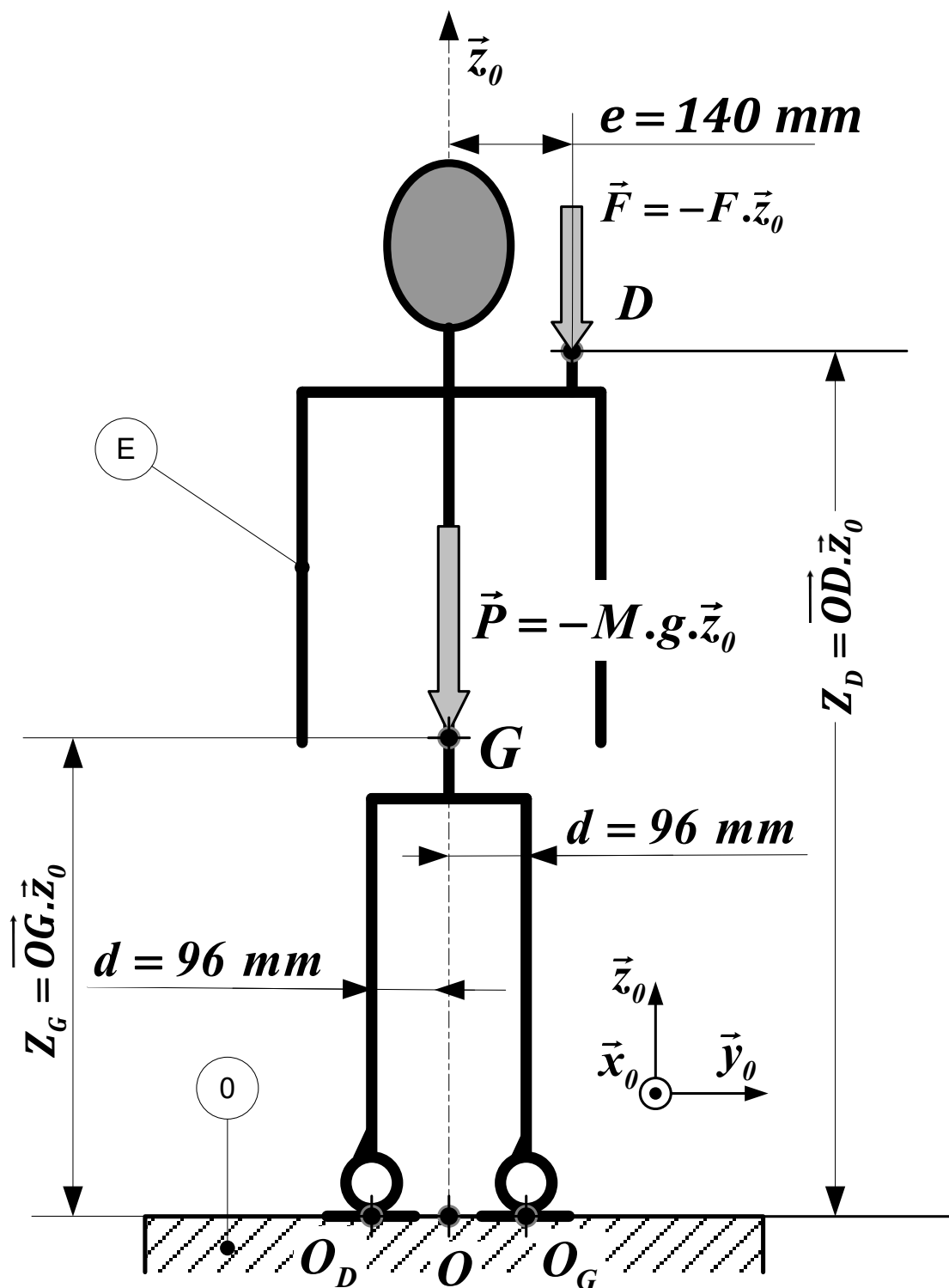
Mesure de la force verticale qu'exerce une personne sur un support fixe pour se relever

Enregistrement réalisé à partir d'une expérience de simulation de relèvement d'une personne, de la position assise à la position debout, avec un appui avec la main sur un support fixe.

Force verticale qu'exerce une personne sur un support fixe, pour se relever.



ANNEXE 2 : Robot en génuflexion. Modèle plan (projection dans le plan frontal)



Données

Masse du Robot Roméo : $M = 40,5 \text{ kg}$.

Accélération de la pesanteur :

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Longueurs : $d = 96 \text{ mm}$; $e = 140 \text{ mm}$

ANNEXE 3 : Robot en génuflexion. Modèle cinématique plan, en projection dans le plan sagittal ($\vec{x}_0, \vec{z}_0$)

Données géométriques :

- $\vec{OA} = l_4 \cdot \vec{z}_0$; $\vec{AB} = l_3 \cdot \vec{z}_3$; $\vec{BC} = l_2 \cdot \vec{z}_2$; $\vec{CD} = l_1 \cdot \vec{z}_1$;
- $l_1 = 485 \text{ mm}$; $l_2 = 320 \text{ mm}$; $l_3 = 290 \text{ mm}$; $l_4 = 67 \text{ mm}$
- $\theta_{21} = -73^\circ$; $\theta_{32} = +106^\circ$;
- $\theta_{43} = -44^\circ$; $\theta_{10} = 10^\circ$

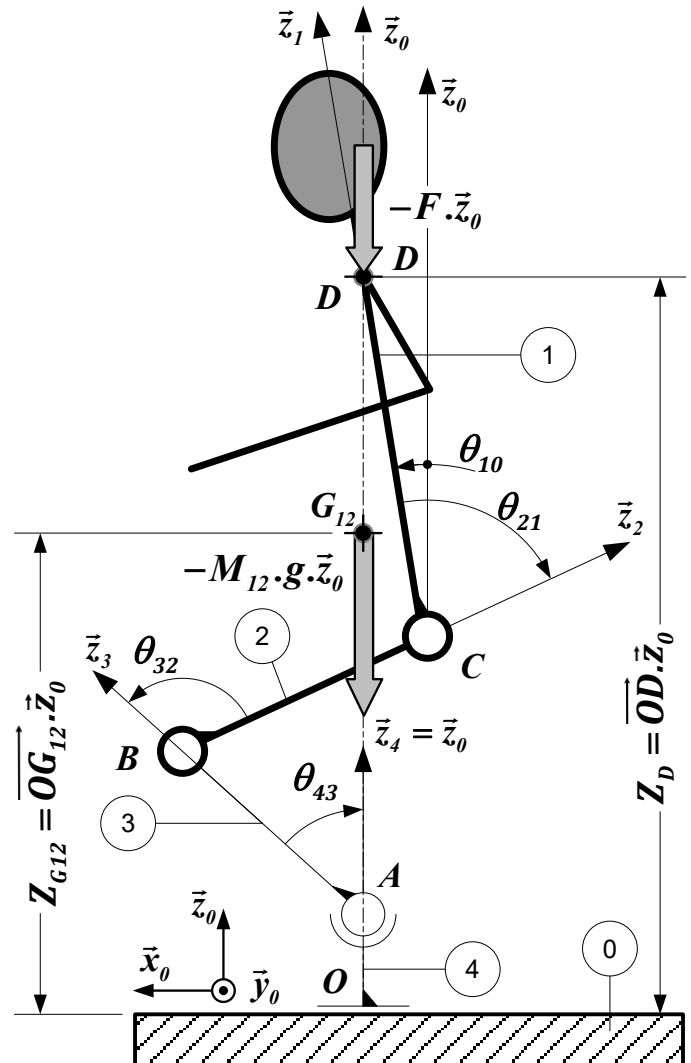
Ces valeurs induisent alors les positions des points D et G_{12} , avec :

- $\vec{OD} = Z_D \cdot \vec{z}_0$ avec $Z_D = 900 \text{ mm}$
- $\vec{OG}_{12} = Z_{G12} \cdot \vec{z}_0$ avec $Z_{G12} \approx 550 \text{ mm}$

Paramétrage :

- **Solide (1)** : Tronc + Bras + Tête
- **Solide (2)** : Cuisses
- **Solide (3)** : Tibias
- **Solide (4)** : Pieds

Robot en génuflexion : solides (1) et (2) isolés ; les autres solides voisins en traits fins. Les efforts de (3) sur (2) ne sont pas représentés.



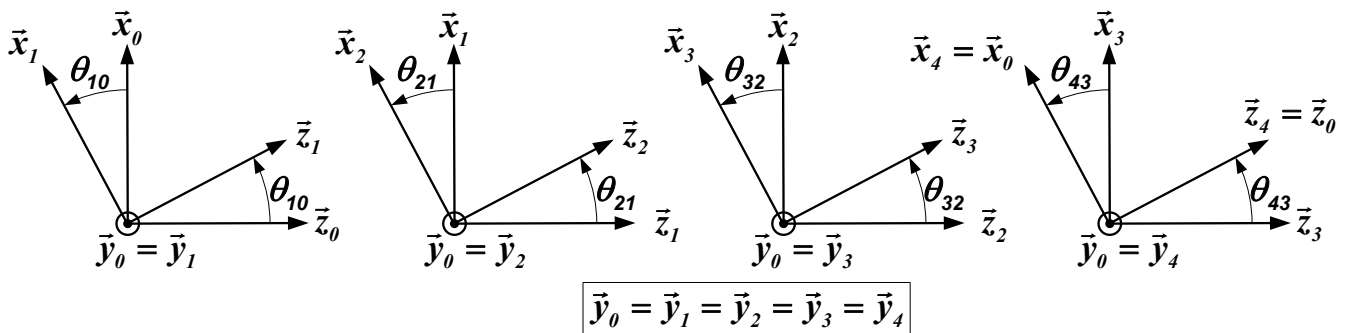
$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: Repère fixe lié au sol (0)

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$: Repère lié au solide (1) : $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$

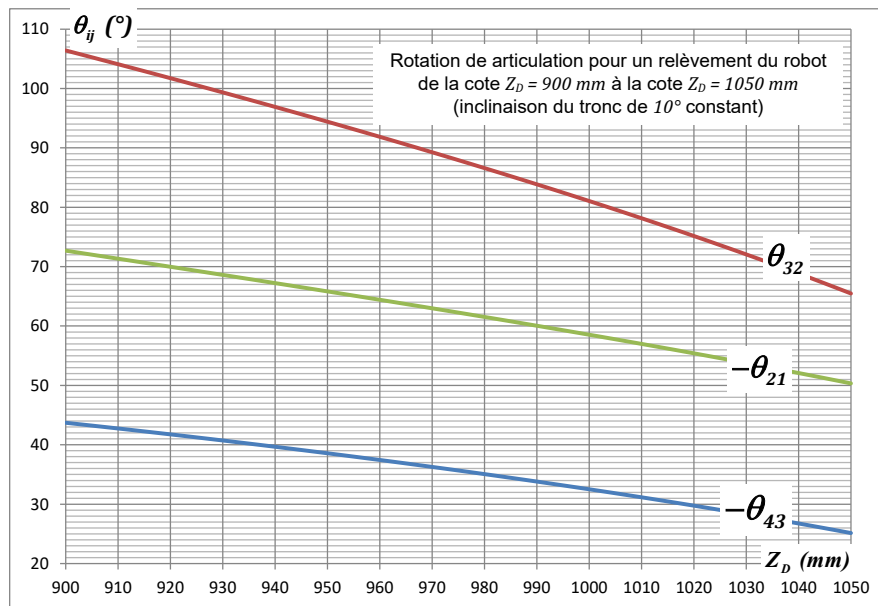
$R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_0, \vec{z}_2)$: Repère lié au solide (2) : $\theta_{21} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$

$R_3(\vec{x}_3, \vec{y}_0, \vec{z}_3)$: Repère lié au solide (3) : $\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$

$R_4 = R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: Repère lié au solide (4) : $\theta_{43} = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4) = (\vec{x}_3, \vec{x}_0) = (\vec{z}_3, \vec{z}_0)$



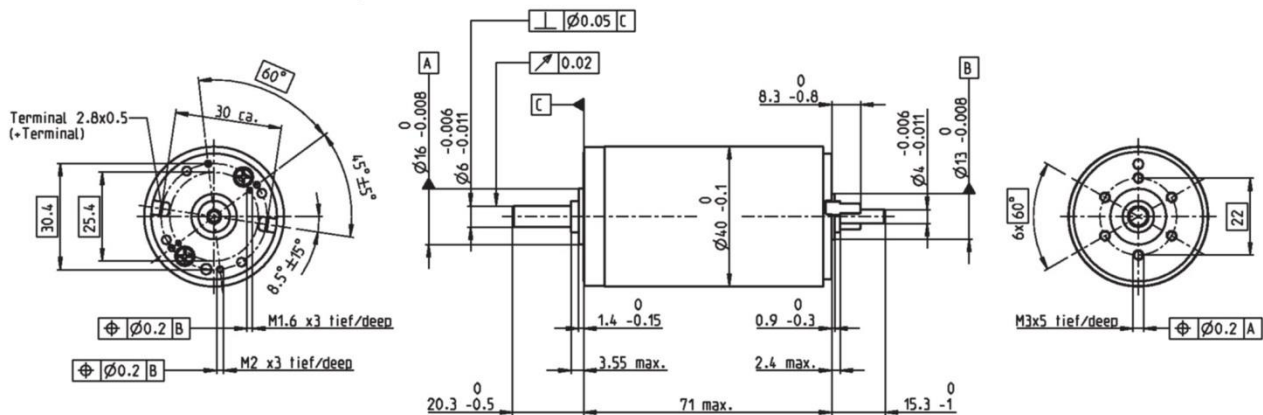
ANNEXE 4 :



Simulation numérique : rotation des articulations pour un relèvement du robot de la cote $Z_D = 900 \text{ mm}$ à la cote $Z_D = 1050 \text{ mm}$ (inclinaison du tronc de 10° constant)

RE 40 Ø40 mm, Graphite Brushes, 150 Watt

maxon DC motor



M 1:2

- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Order Number

Moteur pour l'articulation du genou

Motor Data		148866	148867	148877	218008	218009	218010	218011	218012	218013	218014
Values at nominal voltage											
1 Nominal voltage	V	12.0	24.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0	48.0
2 No load speed	rpm	6920	7580	7580	6420	5560	3330	2690	2130	1710	1420
3 No load current	mA	241	137	68.6	53.7	43.7	21.9	16.7	12.5	9.67	7.77
4 Nominal speed	rpm	6370	6930	7000	5810	4920	2700	2050	1500	1080	774
5 Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	94.9	170	184	183	177	187	187	189	189	188
6 Nominal current (max. continuous current)	A	6.00	5.77	3.12	2.62	2.20	1.38	1.12	0.898	0.721	0.593
7 Stall torque	mNm	1680	2280	2500	1990	1580	995	796	641	512	415
8 Starting current	A	102	75.7	41.4	28.0	19.2	7.26	4.68	3.00	1.92	1.29
9 Max. efficiency	%	88	91	92	91	91	89	88	87	86	85
Characteristics											
10 Terminal resistance	Ω	0.117	0.317	1.16	1.72	2.50	6.61	10.2	16.0	24.9	37.1
11 Terminal inductance	mH	0.0245	0.0823	0.329	0.460	0.612	1.70	2.62	4.14	6.40	9.31
12 Torque constant	mNm / A	16.4	30.2	60.3	71.3	82.2	137	170	214	266	321
13 Speed constant	rpm / V	581	317	158	134	116	69.7	56.2	44.7	35.9	29.8
14 Speed / torque gradient	rpm / mNm	4.15	3.33	3.04	3.23	3.53	3.36	3.39	3.35	3.37	3.44
15 Mechanical time constant	ms	6.03	4.81	4.39	4.36	4.35	4.31	4.31	4.31	4.31	4.32
16 Rotor inertia	gcm ²	139	138	138	129	118	123	121	123	122	120

Documentation constructeur : caractéristiques techniques du moteur utilisé dans l'articulation du genou

Remarque : les caractéristiques du moteur utilisé, MAXON RE40 148877, sont à extraire de l'encadré du document technique

Problème 5 : Contrôle d'une machine de forage (extrait CCinp MP 2023)

Dans le domaine du génie civil, toute structure architecturale a besoin d'une fondation faisant office de liaison entre celle-ci et le sol. Elle permet d'assurer la transmission des charges et leur répartition dans le sol. Lorsque le sol résistant se trouve à une très grande profondeur, ou dans le cas d'une structure très importante, il est nécessaire de créer une fondation profonde composée de pieux en béton armé. L'excavation des terres se réalise alors grâce à un engin appelé foreuse (ou machine de forage).

Comme l'illustre la **figure 1**, ces pieux de fondation profonde sont réalisés en plusieurs étapes :

- étape 1 : positionnement de la foreuse et de l'outil au-dessus du point d'implantation du pieu ;
- étape 2 : forage profond jusqu'au sol résistant ;
- étape 3 : mise en place de l'armature (treillis de fer) du pieu ;
- étape 4 : coulée du béton ;
- étape 5 : retrait de la machine et séchage du pieu.

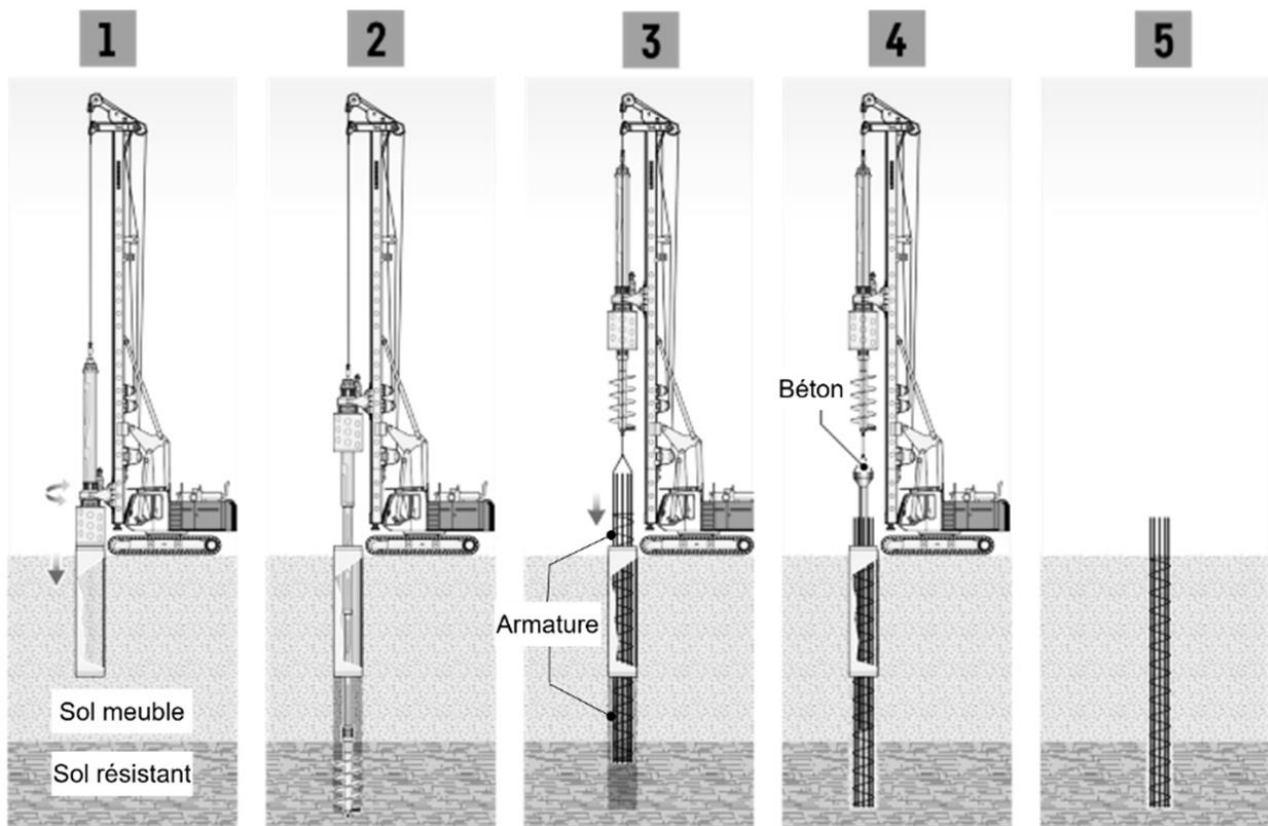


Figure 1 : Réalisation d'un pieu de forage profond

Une machine de forage est un système riche en sous-systèmes. Une description fonctionnelle partielle est donnée **figure 2** et une description structurale, simplifiée, se situe en **figure 3**.

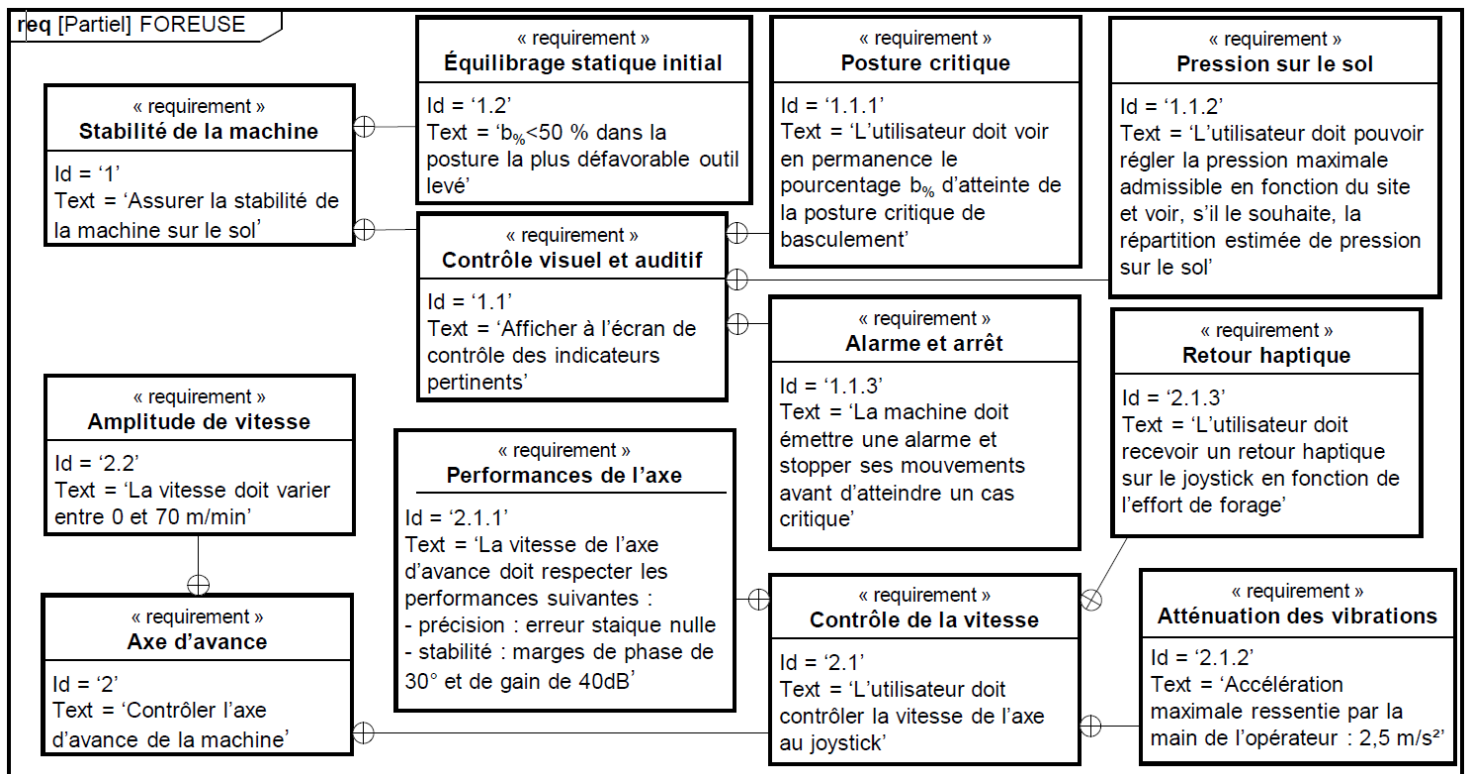


Figure 2 : Diagramme des exigences partiel

Une tourelle, comportant la cabine de pilotage, les différents moteurs de la foreuse et des contrepoids à l'arrière, est montée sur un châssis équipé de chenilles. La tourelle est orientable autour d'un axe vertical à 360° par rapport au châssis et porte un mât de levage. Ce mât, dont la portée et la verticalité par rapport à la tourelle sont réglables à l'aide de vérins, guide une table de forage en translation grâce à un câble d'avance lui-même actionné par un treuil d'avance. En phase de forage, pendant que la table de forage descend, celle-ci actionne en rotation la tige Kelly au bout de laquelle est montée l'outil, généralement une tarière (vis sans fin). Le mouvement d'avance combiné au mouvement de rotation de l'outil permet le forage. De plus, on note que la table de forage est équipée d'un système de suspension permettant d'amortir, pour le reste de la machine, les vibrations dues aux efforts de forage.

Dans ce sujet, il ne sera étudié que la stabilité globale de la machine (**Partie I**) et l'axe d'avance (**Partie II**). Le contrôle de ces fonctionnalités est soumis aux exigences présentes dans le diagramme des exigences partiel de la **figure 2**.

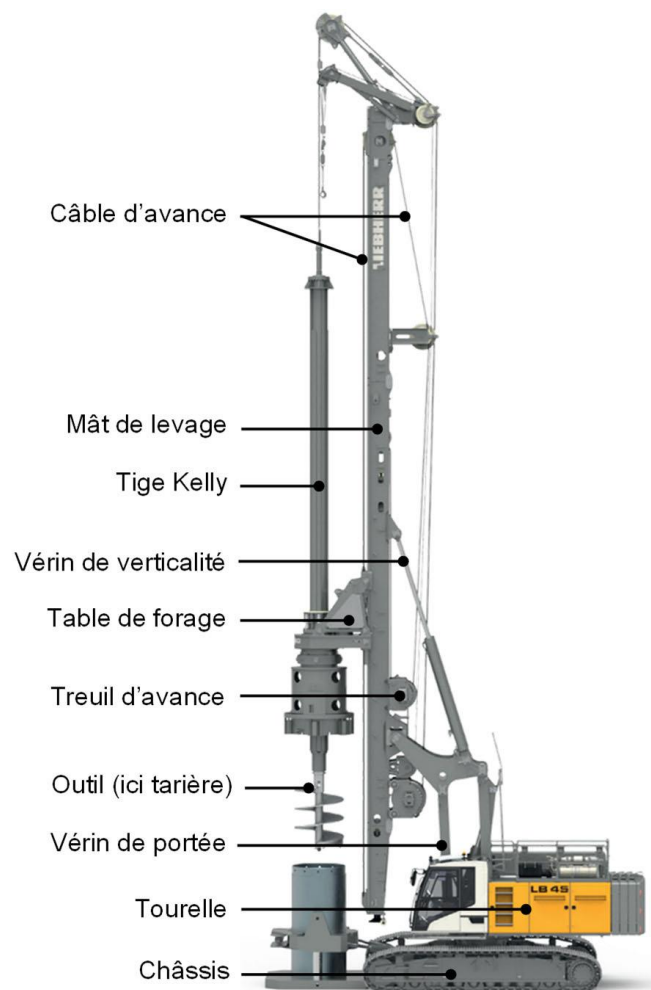


Figure 3 : Principaux constituants d'une foreuse

Partie I - Contrôle de la stabilité de la machine de forage

Les objectifs de cette partie sont de valider l'exigence 1.2 et d'étudier ce que propose le constructeur face à l'exigence 1.1.

I.1 - Condition de basculement statique

En fonction de l'orientation de la tourelle par rapport au châssis et des efforts mis en jeu, il est possible que la machine de forage bascule. Ceci doit légitimement être évité. Pour cela, la connaissance de la position estimée du centre de gravité de la machine permet à l'ordinateur de bord d'afficher à tout instant sur l'écran de contrôle la marge de manœuvre possible avant basculement de la machine. La **figure 4** ci-contre illustre ce que l'opérateur peut observer dans un coin de son écran : le pourcentage $b\%$ d'atteinte de la posture critique de basculement pour une orientation de tourelle donnée. On se propose dans cette sous-partie de retrouver comment l'ordinateur de bord génère ce résultat. Pour cela, on se base sur le paramétrage n° 1 de la machine, avec efforts ponctuels entre le sol et les chenilles, présent en **annexe 1**.

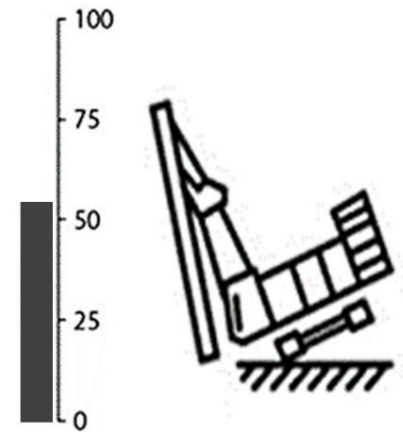


Figure 4 : Aperçu du contrôle de $b\%$

Q1 : Expliquer par un raisonnement simple mais détaillé pourquoi mesurer l'effort F_w dans le câble d'avance permet au constructeur, en quasi-statique, de connaître l'effort de forage F_{sol} sans mesurer ce dernier. Vous préciserez le(s) solide(s) isolé(s), le(s) théorème(s) ou principe(s) utilisé(s) ainsi que les hypothèses nécessaires.

On suppose désormais que F_{sol} est estimé par l'expression $F_{sol} = m \cdot g - 2 F_w$. Sauf indications contraires, on néglige également les effets dynamiques (accélérations faibles).

Q2 : En appliquant le principe fondamental de la statique en O à l'isolement de votre choix, donner l'expression de F_g et de F_d en fonction des données connues du système, de θ et de F_{sol} .

Le problème étant symétrique pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (tourelle orientée à droite) et $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (tourelle orientée à gauche), on n'étudie par la suite que le basculement statique à droite.

Q3 : Donner la condition en effort pour laquelle il y a basculement statique à droite. En absence d'effort de forage, en déduire la condition sur la position (r, θ) du centre de gravité G pour laquelle le basculement à droite est alors évité. Interpréter physiquement ce résultat et montrer que $b\%$ peut être, dans ce cas, approximé par :

$$b_{\%} = 100 \frac{|r \cdot \cos \theta|}{a}$$

On désire dimensionner le nombre de contrepoids de 8 tonnes à placer à l'arrière de la tourelle pour que, en l'absence de forage et en extension maximale, l'exigence 1.2 d'équilibrage statique initial soit respectée même dans le pire des cas où la tourelle est pleinement orientée à droite ($\theta = 0$). Dans cette posture, le schéma de la **figure 5** illustre où se situent, dans le même plan, les centres de gravité des différents éléments de la machine :

- G_t est le centre de gravité de la tourelle et du châssis. La masse de cet ensemble S_t est notée $m_t = 44,7$ tonnes.

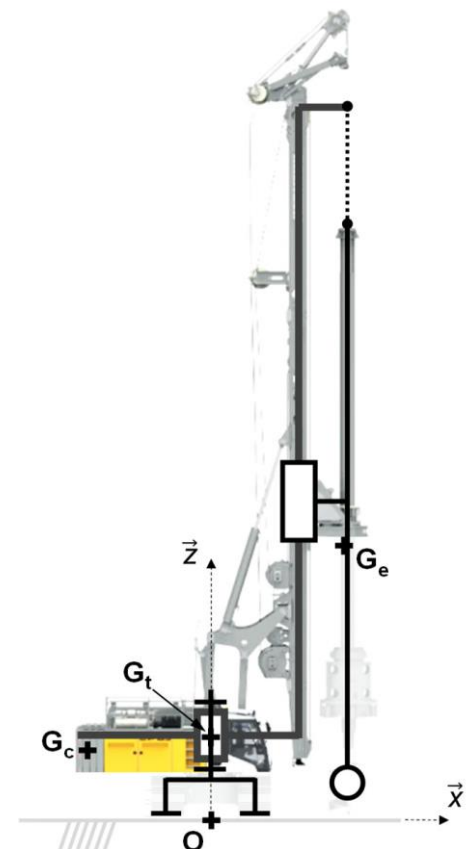


Figure 5 : Position des centres de gravité des différents solides

- G_e est le centre de gravité de tous les équipements mobiles (tige Kelly, potences, vérins, mât, table de forage, outillage, terre à évacuer), positionnés dans la configuration la plus défavorable. La masse de cet ensemble S_e est notée $m_e = 48,8$ tonnes.
- G_c est le centre de gravité des contrepoids. Il y a n_{cp} contrepoids de masse totale $m_c = n_{cp} \cdot m_l$, où $m_l = 8$ tonnes est la masse d'un seul contrepoids.
- L'accélération de la pesanteur est notée : $g = -g \vec{z} = -9,8 \vec{z}$ (en m/s^2).

On note (en mètres) : $\overrightarrow{OG_t} = 2,2 \vec{z}$; $\overrightarrow{OG_e} = 4,4 \vec{x} + 13 \vec{z}$; $\overrightarrow{OG_c} = -4,3 \vec{x} + 2,3 \vec{z}$. On fait l'hypothèse que $\overrightarrow{OG_c}$ reste identique, indépendamment du nombre de contrepoids.

Q4 : Exprimer la coordonnée sur $\vec{x}$, notée r , du centre de gravité G total de la machine en fonction des paramètres connus et de n_{cp} . En déduire le nombre n_{cp} minimum de contrepoids pour respecter l'exigence 1.2.

I.2 - Contrôle de la pression du sol

I.2.1 - Modélisation des actions mécaniques

Le basculement de la machine n'est pas toujours dû à un déport trop important du centre de gravité de la machine, comme étudié dans la partie précédente, ou à un effort F_{sol} (estimé via F_w) trop important. En effet, une fondation profonde a particulièrement du sens si le sol de surface n'est pas très résistant. Ainsi, si la foreuse exerce trop de pression sur ce sol, celui-ci peut s'affaisser, ce qui peut déstabiliser de manière critique la machine. La foreuse doit donc contrôler à tout instant, par estimation, la pression qu'elle exerce sur le sol (et donc que le sol exerce sur elle).

Le **tableau 1** récapitule les niveaux de pression que les sols peuvent supporter avant de risquer de s'affaisser.

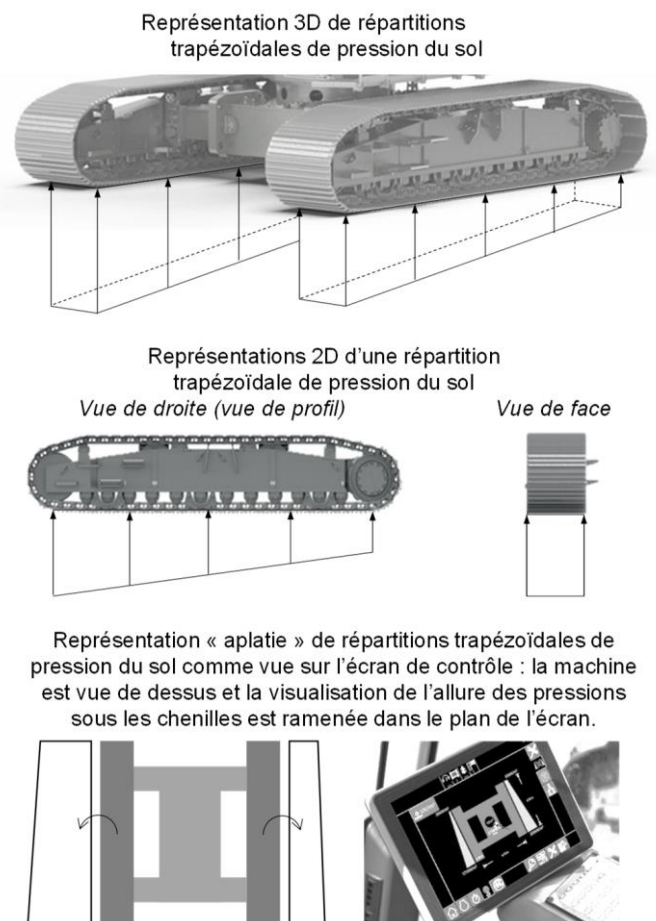
Type de sol	Rocher	Schiste argileux	Gravier compact	Asphalte	Sable compacté	Sable en vrac	Argile humide
Pression maximale admissible (kPa)	2 000	800	400	200	200	100	<100

Tableau 1: Pressions admissibles par le sol selon le type de sol

D'après les normes européennes, les efforts entre le sol et les chenilles ne doivent pas être modélisés comme ponctuels au centre de leur surface de contact comme cela a été supposé dans la partie précédente (avec F_d et F_g). La répartition de pression du sol sur chaque chenille doit être modélisée comme trapézoïdale sur sa longueur et constante sur sa largeur. Un exemple de représentations 3D, 2D et "aplatie" (comme vue sur l'écran de contrôle dans la cabine) de telles répartitions est donné sur la **figure 6**. Sur la vue "aplatie", la machine est vue de dessus et la visualisation de l'allure des pressions sous les chenilles est ramenée dans le plan de l'écran.

Figure 6 ci-contre : Modèles de répartitions trapézoïdales de pression du sol sur les chenilles

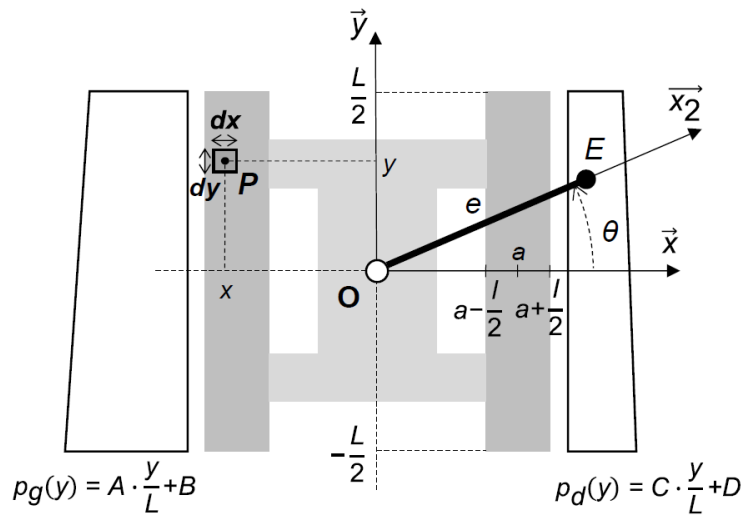
Un des rôles de l'ordinateur de bord est d'estimer ces répartitions de pression afin de vérifier que la pression maximale supportée par le sol (rentrée par l'utilisateur en fonction du site) n'est pas atteinte à un coefficient de sécurité près.



Si c'est le cas, l'ordinateur bloque tous les mouvements de la foreuse qui risqueraient d'empirer et renvoie une alarme. On se propose dans cette sous-partie d'étudier cette estimation.

On base l'étude sur le paramétrage n° 2 de l'**annexe 1**, avec répartition de pression entre le sol et les chenilles. Puis, afin de résoudre le problème plus facilement, on somme les deux glisseurs (poids en G et sol en F) pour en former un seul équivalent (en E), comme visualisé sur la **figure 7** et noté $\overrightarrow{F_{eq \rightarrow f}} = F_{eq} \vec{z}$ où F_{eq} est négatif.

Figure 7 ci-contre : Simplification et modèle équivalent



Q5 : Déterminer les expressions de F_{eq} et de e en fonction de M , m , F_w , R , r et de g .

La force élémentaire de réaction du sol 0 sur la chenille gauche cg est notée : $\overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}}(P) = p_g(y) \vec{z} dS$. La chenille droite est notée cd .

Q6 : Donner les expressions de la force élémentaire $\overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}}(P)$ (expliciter dS) et du moment élémentaire $\overrightarrow{dM_{0,0 \rightarrow cg}}(P)$ au point O qu'exerce le sol sur la chenille gauche en un point P de contact en fonction de A et de B .

Q7 : Déterminer à l'aide de la question précédente les expressions de l'effort global $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}}$ et du moment global $\overrightarrow{M_{0,0 \rightarrow cg}}$ au point O en fonction de A , B et des données connues du système.

De même, on pourrait, par analogie, déterminer $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cd}}$ et $\overrightarrow{M_{0,0 \rightarrow cd}}$ en fonction de C et de D . Au final, on peut en déduire la force $\overrightarrow{F_{0 \rightarrow \Sigma}}$ qu'exerce le sol sur la foreuse et le moment en O qu'exerce le sol sur la foreuse $\overrightarrow{M_{0,0 \rightarrow \Sigma}}$ (via uniquement les chenilles gauche et droite).

Grâce à ces résultats, on trouve qu'à l'équilibre, les répartitions de pressions trapézoïdales doivent respecter le système d'équations (1).

$$(1) \begin{cases} (D + B) \cdot L \cdot l = -F_{eq} \\ (C + A) \frac{L^2 \cdot l}{12} = -F_{eq} \cdot e \cdot \sin \theta \\ (D - B) \cdot L \cdot l \cdot a = -F_{eq} \cdot e \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Q8 : Préciser le théorème (solide ou système de solides isolé(s), vecteur de projection, point de calcul si besoin) qui a permis d'établir chacune des trois équations scalaires du système d'équations (1) ?

La **figure 8** permet de remarquer que B (respectivement D), toujours positive, est la pression moyenne de la répartition trapézoïdale gauche (respectivement droite) et que A (respectivement C), positive ou négative, en est l'écart entre sa pression avant et arrière. Ainsi, la pression maximale du sol sur la chenille gauche vaut toujours $B + \left| \frac{A}{2} \right|$ (respectivement $D + \left| \frac{C}{2} \right|$ à droite).

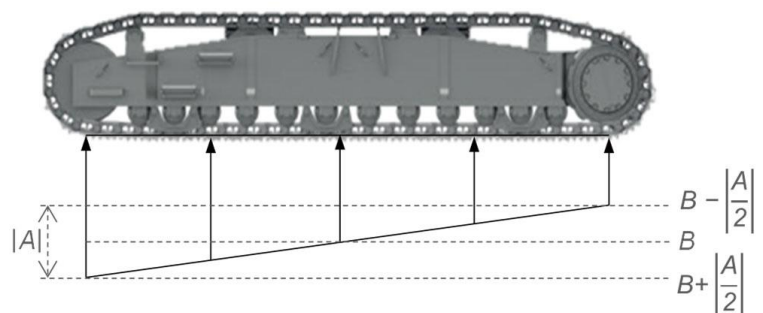


Figure 8 : Aperçu des expressions des pressions minimale, maximale et moyenne

Ainsi, pour estimer la pression maximale exercée au sol, l'ordinateur de bord estime d'abord la position de E et la valeur de F_{eq} en fonction des données renvoyées à tout instant par les capteurs présents sur les différents axes de la foreuse. Ensuite, il détermine les valeurs des pressions A , B , C et D grâce aux équations précédentes **avec l'hypothèse assez réaliste où $C = A$** et en déduit la pression maximale. Enfin, il renvoie à l'écran la visualisation " aplatie " des distributions de pression et sonne l'alarme en cas d'approche de la pression maximale autorisée rentrée par l'utilisateur.

Q9 : Après avoir précisé l'expression des paramètres A , B , C et D , donner l'expression de la pression maximale de chacune des répartitions estimées (gauche et droite) en fonction des données connues par la machine (L , l , a , e , θ et F_{eq} uniquement). En déduire que l'expression unique de la pression maximale sous la foreuse s'écrit :

$$p_{max} = \frac{-F_{eq}}{2.L.l} \left(1 + \frac{e.|cos\theta|}{a} + \frac{6.e.|sin\theta|}{L} \right)$$

Toutefois, il est important de nuancer que la pression du sol sur la foreuse ne peut physiquement pas être négative. C'est pourquoi, lorsque la pression minimale calculée d'une répartition trapézoïdale devient négative ($B - \left| \frac{A}{2} \right|$ pour la chenille gauche ou $D - \left| \frac{C}{2} \right|$ pour la droite), l'ordinateur de bord se doit de changer son modèle de répartition de pression trapézoïdale pour une répartition triangulaire où la pression minimale est imposée à 0 Pa. Dans ces moments-là, l'hypothèse où $C = A$ est rompue pour continuer à respecter le système d'équation précédent. On peut alors montrer dans ce cas que la pression maximale s'exprime de la façon suivante :

$$p_{max} = \frac{-e.F_{eq}}{L.l} \left(\frac{|cos\theta|}{a} + \frac{6|sin\theta|}{L} \right)$$

I.2.2 - Étude séquentielle

En résumé, pour évaluer la pression du sol sous la foreuse, l'ordinateur de bord réalise en permanence (les variables sont calculées continuellement), les étapes suivantes présentées sous la forme d'un diagramme d'états.

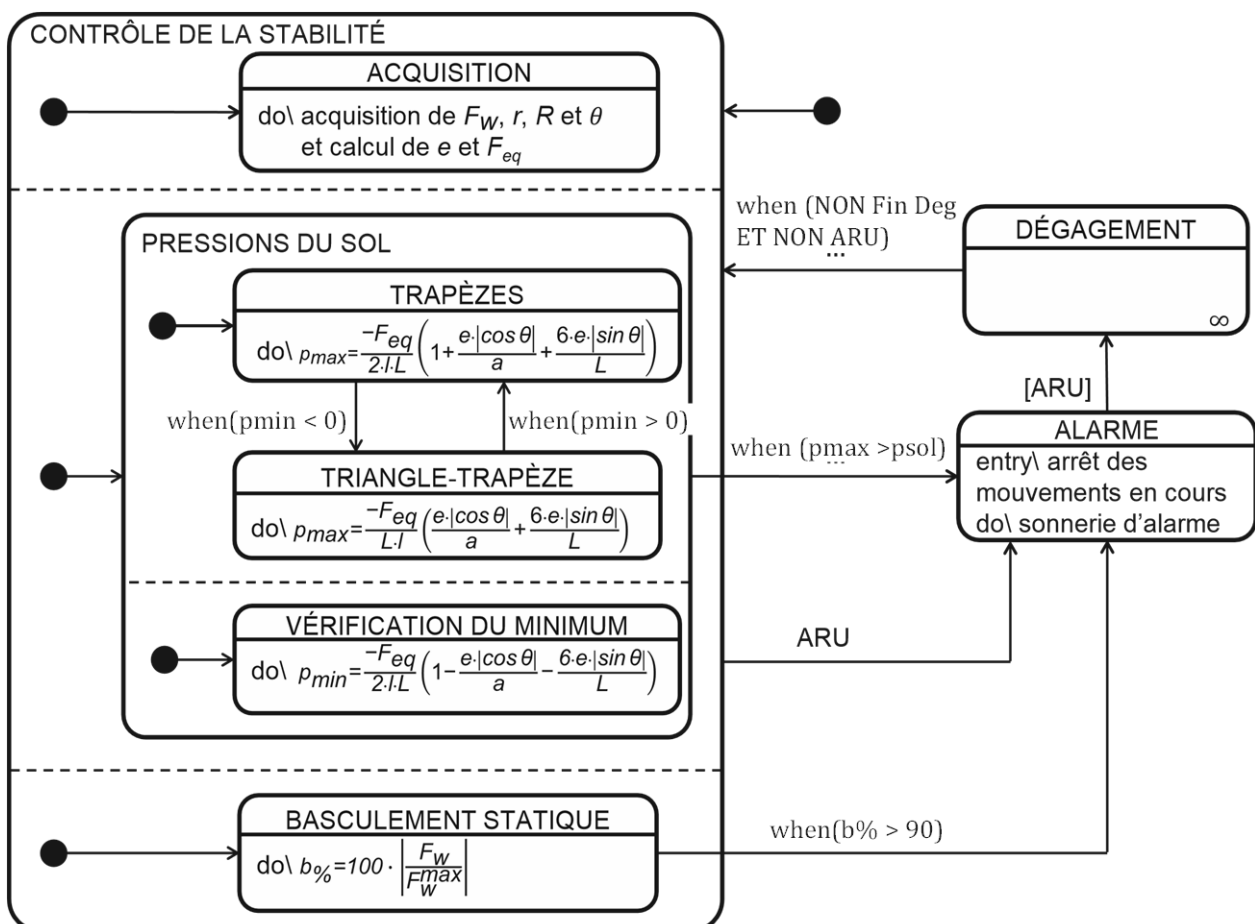


Figure 9 : Diagramme d'états du contrôle de la stabilité

Après comparaison de $p_{\max}$ avec la valeur p_{sol} maximale autorisée :

- dans le cas où la valeur de $p_{\max}$ dépasse la valeur de p_{sol} , ou si $b\%$ dépasse 90 %, sonnerie de l'alarme et blocage des mouvements en cours de la foreuse jusqu'à ce que l'opérateur appuie sur l'arrêt d'urgence donnant accès à un mode de dégagement non-détaillé ici. La variable booléenne traduisant l'arrêt d'urgence est notée **ARU** et vaut 1 si l'arrêt est enclenché, 0 sinon
- redémarrage du travail normal de la foreuse et du contrôle de sa stabilité une fois le dégagement terminé et l'arrêt d'urgence désenclenché. La variable booléenne de la fin de dégagement est notée **FinDeg** et vaut 1 si la demande de fin est enclenchée, 0 sinon.

On propose une chronologie d'événements sur le **document réponse** : déploiement, orientation puis positionnement de la tourelle. L'évolution théorique des pressions estimées par l'ordinateur et du pourcentage d'atteinte de la posture critique de basculement qui découle de ces événements est aussi donnée.

Q10 : Grâce au diagramme d'états, surligner sur le **document réponse** l'évolution de $p_{\max}$ retenue par l'ordinateur de bord au cours du temps. Indiquer sur le **document réponse** l'instant où l'alarme se déclenchera sachant que ces opérations se déroulent sur du gravier compact (voir **tableau 1**) et que l'opérateur a réglé p_{sol} à la limite maximale de ce matériau sans coefficient de sécurité.

Q11 : Résumer en quoi les estimations de $b\%$ et de p_{sol} par la machine sont des indicateurs pertinents et complémentaires pour le contrôle de la stabilité, afin de satisfaire l'exigence 1.1.

Partie II - Contrôle de la vitesse de la table de forage

La qualité d'un forage dépend énormément de la vitesse de rotation de l'outil ainsi que de sa vitesse d'avance. On souhaite maîtriser cette dernière par un asservissement en vitesse de la table de forage le long du mât de levage.

L'objectif sera, dans cette partie, de valider les exigences de performances de l'axe (id. 2.1.1).

Le schéma-bloc de l'**annexe 2** modélise toutes les parties du système à étudier pour obtenir un modèle de connaissance de cet asservissement.

II.1 - Sous ensemble " Mécanisme " : étude cinématique de la table de forage

On s'intéresse ici à la partie " Mécanisme " du schéma-bloc. Pour cela, il est nécessaire d'établir tout d'abord le lien entre la vitesse de rotation ω_w du treuil d'avance ("crowd winch") et la vitesse V de déplacement de la table de forage. Ainsi, on travaillera désormais sur la modélisation proposée **figure 10**. Le schéma de gauche modélise notamment le système complet en trois dimensions.

Le système est constitué :

- d'un moteur hydraulique, suivi d'un réducteur à engrenages non représenté mettant en rotation le winch **1**. Ce dernier est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ avec le châssis **0** (immobile par rapport au sol). Le tambour de ce winch permet de tracter un câble qui s'enroule autour de celui-ci. Le rayon d'enroulement, noté R_1 , est supposé constant. La vitesse de rotation du tambour du winch autour de son axe est notée $\omega_w = \omega_1 = \omega_{1/0}$;
- de trois poulies **2**, **2'** et **2''** chacune en liaison pivot avec le châssis d'axes respectifs $(B, \vec{x})$, $(B', \vec{x})$, $(B'', \vec{x})$. Elles ont toutes trois un rayon R_2 ;
- de deux poulies mobiles **3** et **3'** en liaison pivot avec la table de forage **4**, d'axes respectifs $(C, \vec{y})$ et $(C', \vec{y})$. Elles sont de même rayon R_3 et on note $\omega_3 = \omega_{3/4}$ leur vitesse de rotation autour de leur axe ;
- de la table de forage **4**, mise en mouvement grâce au câble et par l'intermédiaire des poulies **3** et **3'**, qui est en liaison glissière de direction $\vec{z}$ avec le châssis **0**. On note V la vitesse d'avance de la table de forage telle que $\overrightarrow{V(D, 4/0)} = V\vec{z}$;
- du câble, supposé inextensible, qui est attaché à ses extrémités au châssis au niveau des points O et O' . On suppose de plus que le câble s'enroule sans glisser autour de toutes les poulies et du tambour du winch d'avance.

Remarque : l'ensemble noté **5** avec le système d'amortisseur sera étudié ultérieurement.

Le schéma de droite de la **figure 10** (schéma cinématique dans le plan $(\vec{x}, \vec{z})$) représente uniquement la partie du système constitué du châssis **0**, de la table de forage **4** et des deux poulies **3** et **3'**. On introduit deux points mobiles I et J, marquant le début et la fin de l'enroulement du câble autour de la poulie **3**. Par analogie, on a les points I' et J' pour la poulie **3'**.

On a alors : $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{C'I'} = \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{J'C'} = R_3 \vec{x}$

La condition de roulement sans glissement du câble sur la poulie **3** et sur le tambour **1**, associée à la composition du mouvement au point I, permettent de trouver l'équation suivante :

$$\overrightarrow{V(J, 4/0)} \cdot \vec{z} = (\overrightarrow{V(J, 4/3)} + \overrightarrow{V(J, 3/\text{câble})} + \overrightarrow{V(J, \text{câble}/0)}) \cdot \vec{z} = V = -R_3 \omega_3 + R_1 \omega_1$$

Q12 : De la même manière, en utilisant la composition des vitesses au point I et en exprimant une condition de roulement sans glissement, montrer que : $\overrightarrow{V(I, 4/0)} \cdot \vec{z} = V = R_3 \omega_3$

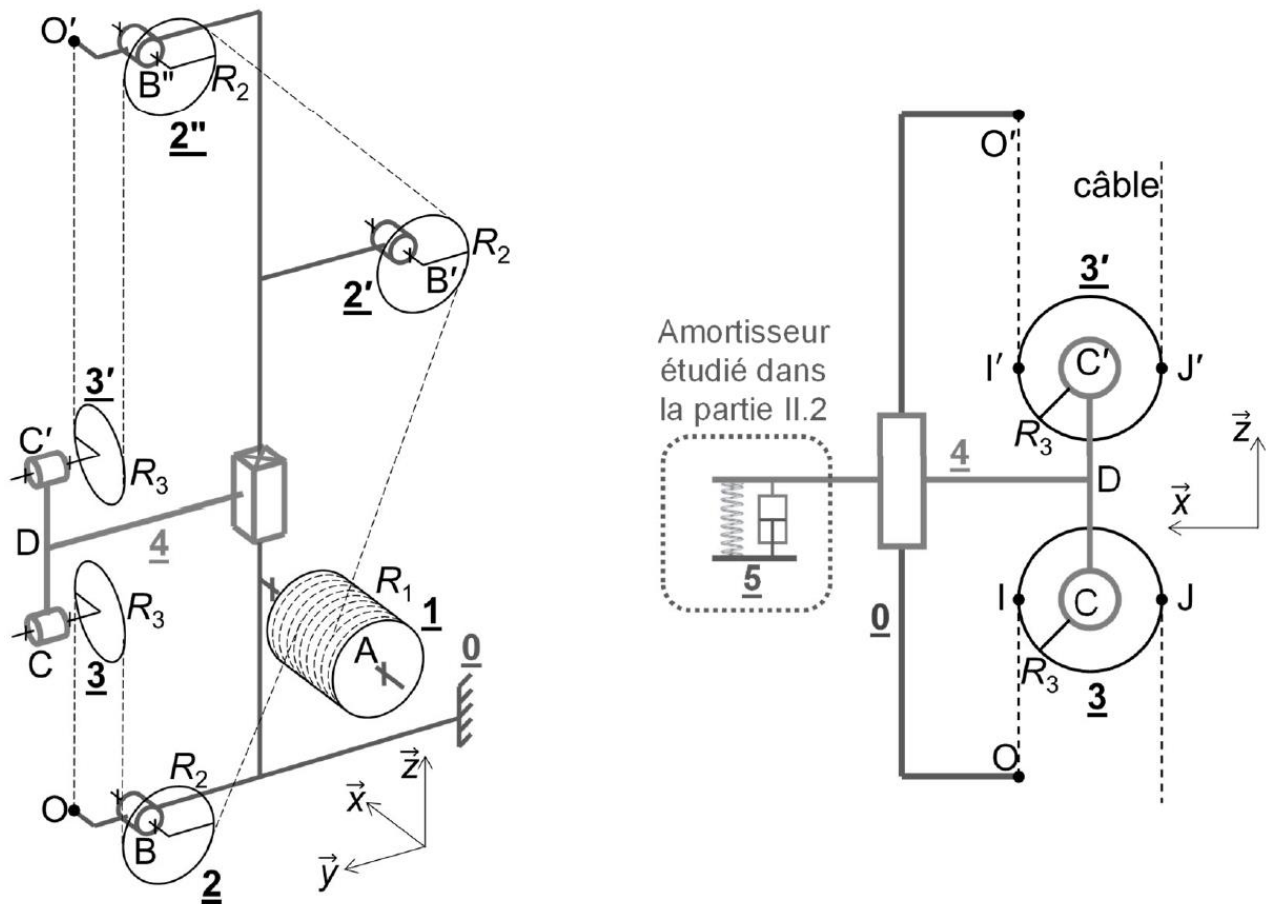


Figure 10 : Schéma cinématique 3D du système d'entraînement de la table de forage (à gauche) ; vue 2D simplifiée (à droite)

Q13 : Dédurre de la question précédente l'expression du rayon équivalent, noté R_{eq} , dans le sous-système " Mécanisme " du schéma-bloc fourni en **annexe 2**, en fonction de R_1 seulement.

Un réducteur à engrenages de rapport de réduction k_r permet d'adapter la vitesse de rotation du moteur hydraulique $\omega_m(t)$, tel que : $\omega_w(t) = k_r \cdot \omega_m(t)$

Une génératrice tachymétrique (mesurant la vitesse de rotation de la poulie 2 de rayon R_2), de gain K_{gen} permet le retour d'information de l'asservissement en vitesse : $U_{mes}(t) = K_{gen} \omega_2(t)$. Cette poulie tourne à une vitesse de rotation proportionnelle à V (non glissement) telle que : $V = \frac{R_2}{2} \omega_2(t)$.

Q14 : Donner les expressions des fonctions de transfert H_9, H_{10} et H_{11} du schéma bloc de l'annexe 2, partie « mécanismes ». (bonus : justifier la loi précédemment écrite : $V = \frac{R_2}{2} \omega_2(t)$)

II.2 - Partie " Amortisseur " : étude dynamique de la table de forage

Afin de modéliser l'asservissement en vitesse de la table de forage, il est possible de prendre en compte que, lors de l'étape de forage, un système d'" amortisseurs Kelly " (suspensions) permet d'amortir les chocs et vibrations. Chaque suspension est composée d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux λ . Il y a n suspensions équiréparties autour de l'axe de la tige Kelly (soient n ressorts et n amortisseurs) disposées en parallèle, comme l'indique le schéma de la **figure 11**. On précise que le guidage entre la table **4** et l'ensemble **5** est réalisé par une liaison glissière parfaite, non représentée.

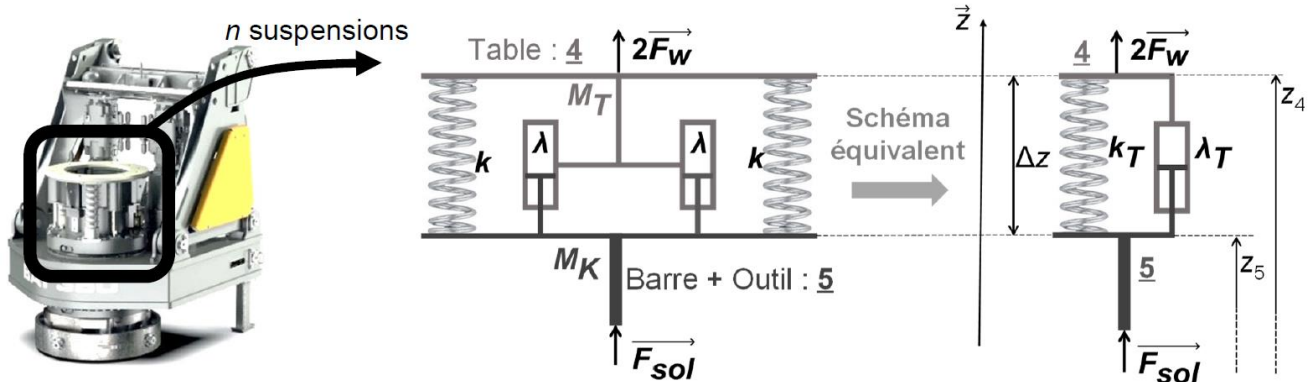


Figure 11 : Modélisation de liaison entre la table et la barre Kelly lors du forage

On note z_4 la position verticale de la table **4** de masse M_T et z_5 la position verticale de l'ensemble **5** {barre + outil} de masse M_K . Elles sont toutes deux établies par rapport à une référence fixe, liée au châssis de la foreuse.

L'allongement instantané du ressort est noté $\Delta z = z_4 - z_5$. De plus, on note :

- Δz_0 : la valeur de l'allongement du ressort à vide ;
- Δz_e : la valeur de l'allongement du ressort à l'équilibre (**5** suspendu sans action du sol sur lui).

Précision sur les actions mécaniques :

- action de traction du câble sur la table **4**, modélisée par une force verticale $2F_w \vec{z}$. Cette force de traction s'écrit $2F_w$, sachant que : $2F_w = 2F_{we} + \delta F_w$ où :
 - F_{we} est la force de maintien à l'équilibre de l'ensemble {**4**+**5**} (sans autre action supplémentaire),
 - δF_w est la variation de cette force autour de la force F_{we} de maintien à l'équilibre ;
- action du sol sur l'ensemble **5**, modélisée par une force verticale $F_{sol} \vec{z}$;
- action de la pesanteur : l'accélération de la pesanteur sera notée $\vec{g} = -g \vec{z}$;
- action d'un ressort de raideur k sur la table **4** : $\vec{F}_r = k(\Delta z_0 - \Delta z) \vec{z}$;
- action d'un amortisseur (modèle de frottement visqueux) sur la table **4** : $\vec{F}_a = -\lambda (\dot{z}_4 - \dot{z}_5) \vec{z} = -\lambda (\Delta \dot{z}) \vec{z}$

On souhaite simplifier la modélisation en retenant le schéma équivalent de droite sur la **figure 11**. Dans ce cas, l'action de l'ensemble des n ressorts et des n amortisseurs s'exprime par :

- $\vec{F}_{nr} = k_T(\Delta z_0 - \Delta z) \vec{z}$
- $\vec{F}_{na} = -\lambda_T (\Delta \dot{z}) \vec{z} = -\lambda_T \frac{d\Delta z}{dt} \vec{z}$

Toutes les suspensions (ressorts et amortisseurs) ont une masse négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

Q15 : Exprimer k_T et λ_T en fonction de n , k et de λ

Q16 : À l'équilibre, système suspendu, proposer et mettre en œuvre une stratégie de résolution en appliquant le principe fondamental de la statique (préciser solide(s) isolé(s), théorème(s) utilisé(s), vecteur de projection et hypothèses nécessaires) afin d'établir une première équation, liant k_T , Δz_e , Δz_0 , M_K et g et une deuxième, liant F_{we} , M_K , M_T et g .

Q17 : En fonctionnement, isoler la table **4** et déterminer son équation du mouvement vertical $\ddot{z}_4(t)$ en fonction des paramètres du problème. Utiliser pour cela l'équation de résultante issue du principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{R}_{4 \rightarrow 4} \cdot \vec{z} = M_T \ddot{z}_4$

Par analogie, l'équation du mouvement vertical de l'ensemble **5** {barre + outil} s'écrit :

$$M_K \ddot{z}_5(t) = F_{sol} - k_T (\Delta z_0 - \Delta z(t)) + \lambda_T \dot{\Delta z} - M_K g$$

On pose le changement de variables suivant : $z_5(t) = \hat{z}_5(t) - \frac{\Delta z_e}{2}$ et $z_4(t) = \hat{z}_4(t) + \frac{\Delta z_e}{2}$, permettant de s'affranchir des actions de la pesanteur. On rappelle que Δz_e est constant.

Q18 : En utilisant les résultats précédents et le changement de variables précédent, montrer que l'on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} M_T \frac{d^2 \hat{z}_4(t)}{dt^2} + \lambda_T \frac{d \hat{z}_4(t)}{dt} + k_T \hat{z}_4(t) &= \lambda_T \frac{d \hat{z}_5(t)}{dt} + k_T \hat{z}_5(t) + \delta F_w \\ M_K \frac{d^2 \hat{z}_5(t)}{dt^2} + \lambda_T \frac{d \hat{z}_5(t)}{dt} + k_T \hat{z}_5(t) &= \lambda_T \frac{d \hat{z}_4(t)}{dt} + k_T \hat{z}_4(t) + F_{sol} \end{aligned}$$

Pour une fonction temporelle $f(t)$ ou $F(t)$, on note sa transformée de Laplace $F(p) = L[f(t)]$. Les conditions initiales sont considérées être toutes nulles dans tout le sujet.

Q19 : Traduire le système de deux équations différentielles précédent dans le domaine de Laplace, puis justifier les expressions suivantes des trois fonctions de transfert $H_6(p)$, $H_7(p)$ et $H_8(p)$ présentes sur l'annexe 2 (zone encadrée notée " Amortisseur ", schéma pour lequel $L(\dot{\hat{z}}_4) = L(\dot{z}_4) = V(p)$). On notera $L(\delta F_w) = \Delta F_w$ et $L(\hat{z}_i(t)) = Z_i(p)$.

$$H_6(p) = \frac{k_T + \lambda_T p}{p} \quad H_7(p) = \frac{k_T + \lambda_T p}{k_T + \lambda_T p + M_K p^2} \quad H_8(p) = \frac{k_T + \lambda_T p + M_T p^2}{p}$$

II.3 - Sous-systèmes Servo-pompe, Circuit hydraulique et Moteur hydraulique

Ces sous-systèmes sont représentés sur le schéma-bloc de l'annexe 2.

Le dispositif de positionnement de la table de forage et de son outil utilisent de l'énergie hydraulique. Les modèles de connaissance pour ces systèmes hydrauliques sont donnés ci-dessous :

- Le dispositif est contrôlé par une électrovanne proportionnelle de gain K_s . Le débit disponible est noté q_p , la tension délivrée par la partie commande est notée U_s et on a :

$$q_p(t) = K_s \cdot U_s(t) \quad (i)$$

- Les équations de mécanique des fluides dans un circuit fermé permettent d'écrire :

$$\frac{V_0}{B} \frac{d\Delta p(t)}{dt} = q_p(t) - q_m(t) \quad (ii)$$

V_0 désigne le volume dans le circuit et B est le coefficient de compressibilité du fluide. Δp désigne une différence de pression dans le circuit et q_m un débit retour.

- Les lois de comportement hydromécanique permettent d'introduire le lien entre la vitesse de rotation du moteur hydraulique ω_m et le débit q_m d'une part et entre le couple moteur et le différentiel de pression Δp d'autre part. On note C_Y la cylindrée du moteur et on a :

$$q_m(t) = C_Y \omega_m(t) \quad (iii) \quad \text{et} \quad C_m(t) = C_Y \Delta p(t) \quad (iv)$$

- L'équation du mouvement du mécanisme s'écrit :

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + a \omega_m(t) = C_m(t) - C_r(t) \quad (v)$$

où J_{eq} est l'inertie équivalente des solides en mouvement ramenée sur l'axe de rotation du moteur, a un coefficient de frottement visqueux équivalent et C_r modélisant les couples résistants autres que ceux dus au frottement visqueux.

Q20 : Traduire les cinq équations (i), (ii), (iii), (iv) et (v) dans le domaine de Laplace et expliciter les cinq fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$, $H_4(p)$ et $H_5(p)$ du schéma bloc de l'annexe 2.

Q21 : Préciser le rôle du gain K_{ihm} de la partie " Chaîne d'information " de l'annexe 2 et donner son expression en fonction des transmittances figurant dans le schéma-bloc pour que le système soit correctement asservi (ε_V doit être nul lorsque $V = V_c$).

II.4 - Étude de l'asservissement de la vitesse d'avance de la table de forage

On décide dans la suite de ne pas prendre en compte l'amortisseur en considérant la tige Kelly en liaison complète rigide avec la table de forage, afin de valider les performances de l'asservissement en poursuite. Cette hypothèse sera validée en fin de sujet et permet pour l'instant de travailler sur le schéma-bloc simplifié de la **figure 12**

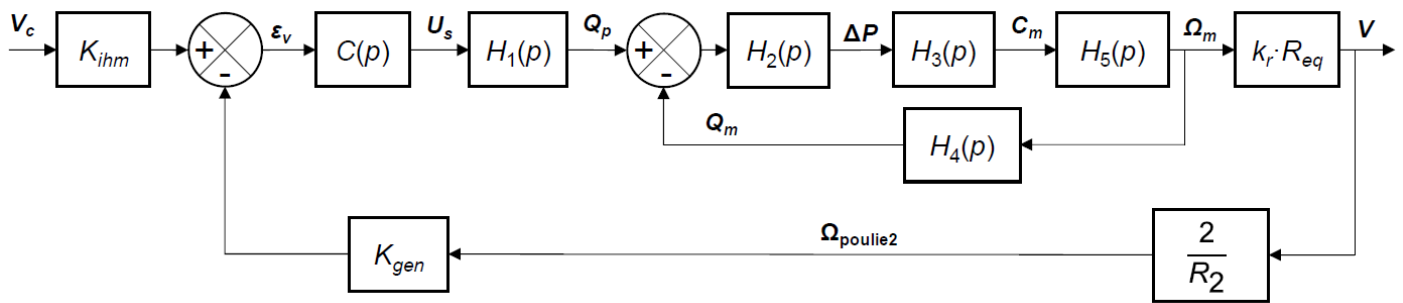


Figure 12 : Schéma-bloc pour l'étude en poursuite de l'asservissement en vitesse

Q22 : A partir de la figure 12, exprimer la fonction de transfert $\frac{\Omega_m(p)}{U_s(p)}$, notée $H(p)$, en fonction des fonctions de transfert $H_i(p)$, où $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Quels que soient les résultats trouvés précédemment, on travaille désormais avec le schéma-bloc simplifié de la **figure 13** où K_0 est un gain d'adaptation fixe.

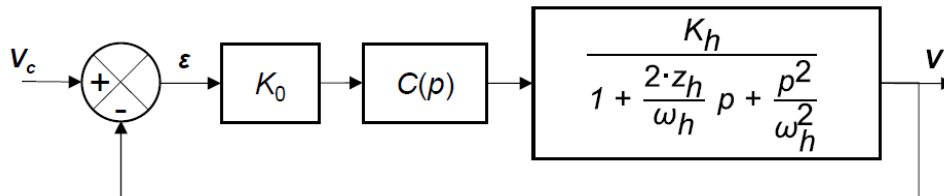


Figure 13 : Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse simplifié

On prend dans un premier temps un correcteur $C(p)$ proportionnel : $C(p) = K_p$.

Q23 : Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $G_{BO}(p) = \frac{V(p)}{\epsilon(p)}$

Q24 : Avec un correcteur proportionnel, peut-on satisfaire l'exigence de précision de vitesse indiquée à l'exigence 2.1.1. ? Justifier.

On utilise dans un second temps un correcteur proportionnel intégral : $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

Q25 : L'exigence de précision sur la vitesse est-elle satisfaite ? Justifier.

Ce correcteur est initialement réglé avec les valeurs suivantes : $K_p = 1$ et $T_i = 10$ s.

Q26 : Tracer les diagrammes de Bode asymptotique et réel de ce correcteur sur le document réponse. Détailler les constructions.

Pour le réglage de la question précédente, on donne le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi corrigée sur le document réponse.

Q27 : Affiner le réglage du correcteur (sans modifier la valeur de T_i) en proposant une valeur de K_p permettant de garantir la marge de phase spécifiée dans l'exigence 2.1.1. Effectuer les tracés nécessaires à la réponse sur le document réponse.

Enfin, on souhaite valider ou invalider l'hypothèse faite en début de cette sous-partie concernant la non-influence de l'amortisseur sur les performances d'asservissement en vitesse d'avance de la table de forage. Les diagrammes de Bode donnés en fin de document réponse, illustrent la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée sans (en train plein) et avec amortisseur (en pointillés).

Q28 : Sur quelle(s) performance(s) la présence de l'amortisseur peut-elle influencer ? Justifier que le correcteur choisi permet de répondre aux exigences 2.1.1 en présence de l'amortisseur.

ANNEXE 1 - Paramétrage mécanique

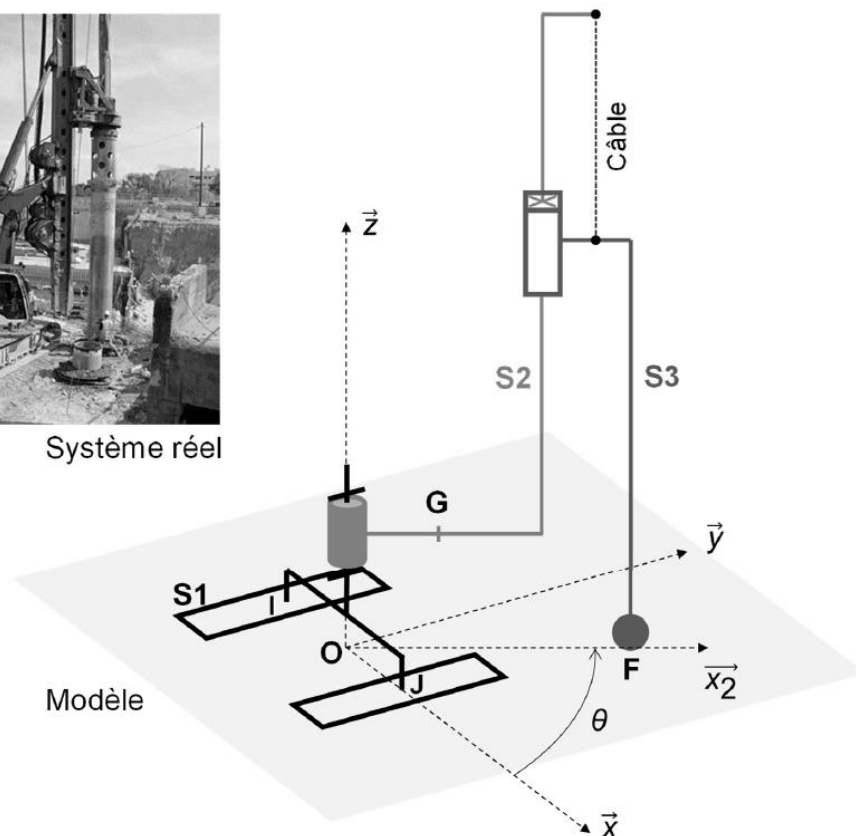
Paramètres généraux :

Soient :

- **0** le sol, **S1** le châssis de la foreuse, **S2** sa tourelle et son mât et **S3** l'ensemble {table de forage + outil} ;
- $\mathcal{R}_0 = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère attaché aux solides **S0** et **S1** ;
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ la base attachée aux solides **S2** et **S3** telle que $(\vec{x}, \vec{x}_2) = \theta$ où θ est connu ;
- $\Sigma = \{\mathbf{S1}, \mathbf{S2}, \mathbf{S3}\}$ l'ensemble de la foreuse, de centre de gravité G tel que $\overrightarrow{OG} = r \vec{x}_2 + z_G \vec{z}$;
- $M = 186,5 \text{ tonnes}$ la masse de l'ensemble Σ et $m = 18 \text{ tonnes}$ la masse de **S3** seul ;
- $2F_w \vec{z}$, connu, l'effort du câble d'avance sur **S3**. La masse du câble est négligée dans la suite ;
- $F_{sol} \vec{z}$, inconnu, l'effort de forage du sol **0** sur l'outil de forage **S3** au point F , connu, défini par $\overrightarrow{OF} = R \vec{x}_2$;
- $-g \vec{z}$ où $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, l'accélération de la pesanteur terrestre.



Système réel



Modèle

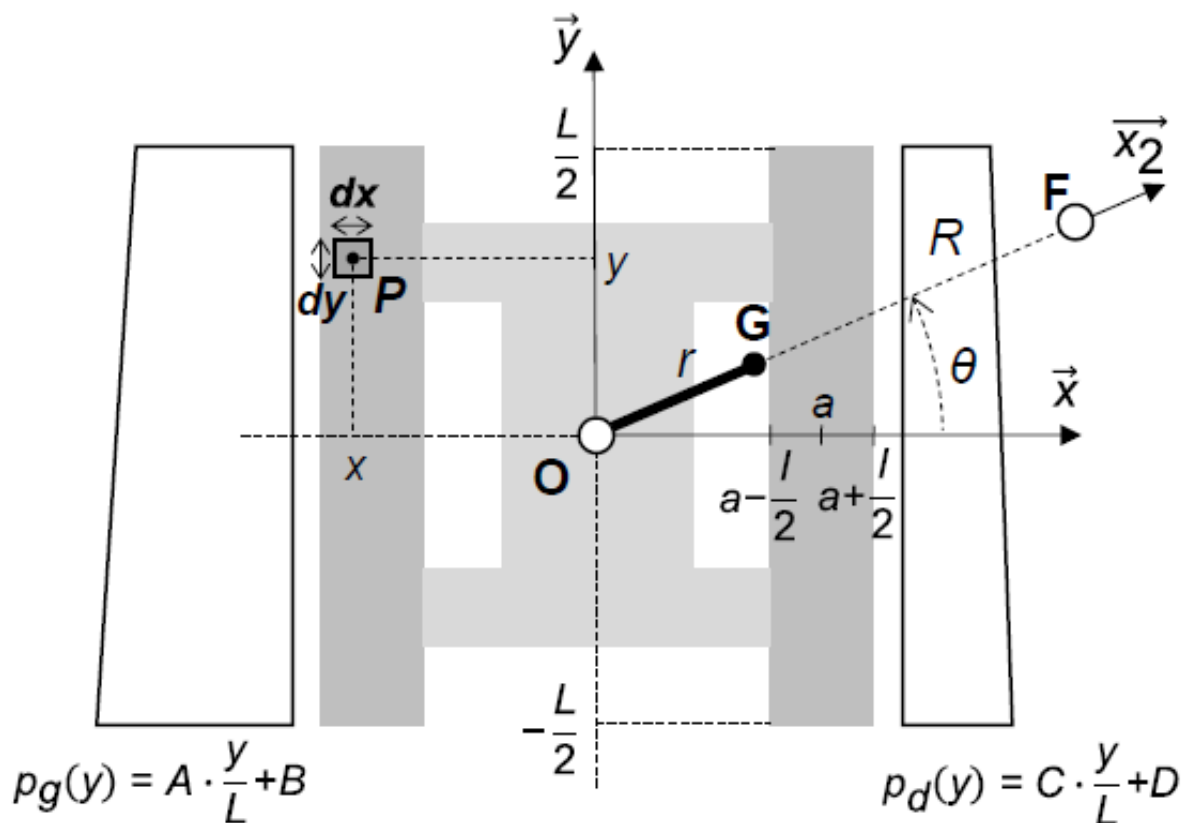
Paramétrage n° 1 : modèle avec efforts ponctuels entre le sol et la foreuse

- $F_g \vec{z}$, inconnu, l'effort du sol **0** sur **S1**, supposé ponctuel au centre I de la surface de contact entre la chenille gauche cg et le sol tel que $\|\overrightarrow{OI}\| = a = 2,1 \text{ m}$;
- $F_d \vec{z}$, inconnu, l'effort du sol **0** sur **S1**, supposé ponctuel au centre J de la surface de contact entre la chenille droite cd et le sol tel que $\|\overrightarrow{OJ}\| = a = 2,1 \text{ m}$.

Paramétrage n° 2 : modèle avec répartition de pression entre le sol et la foreuse

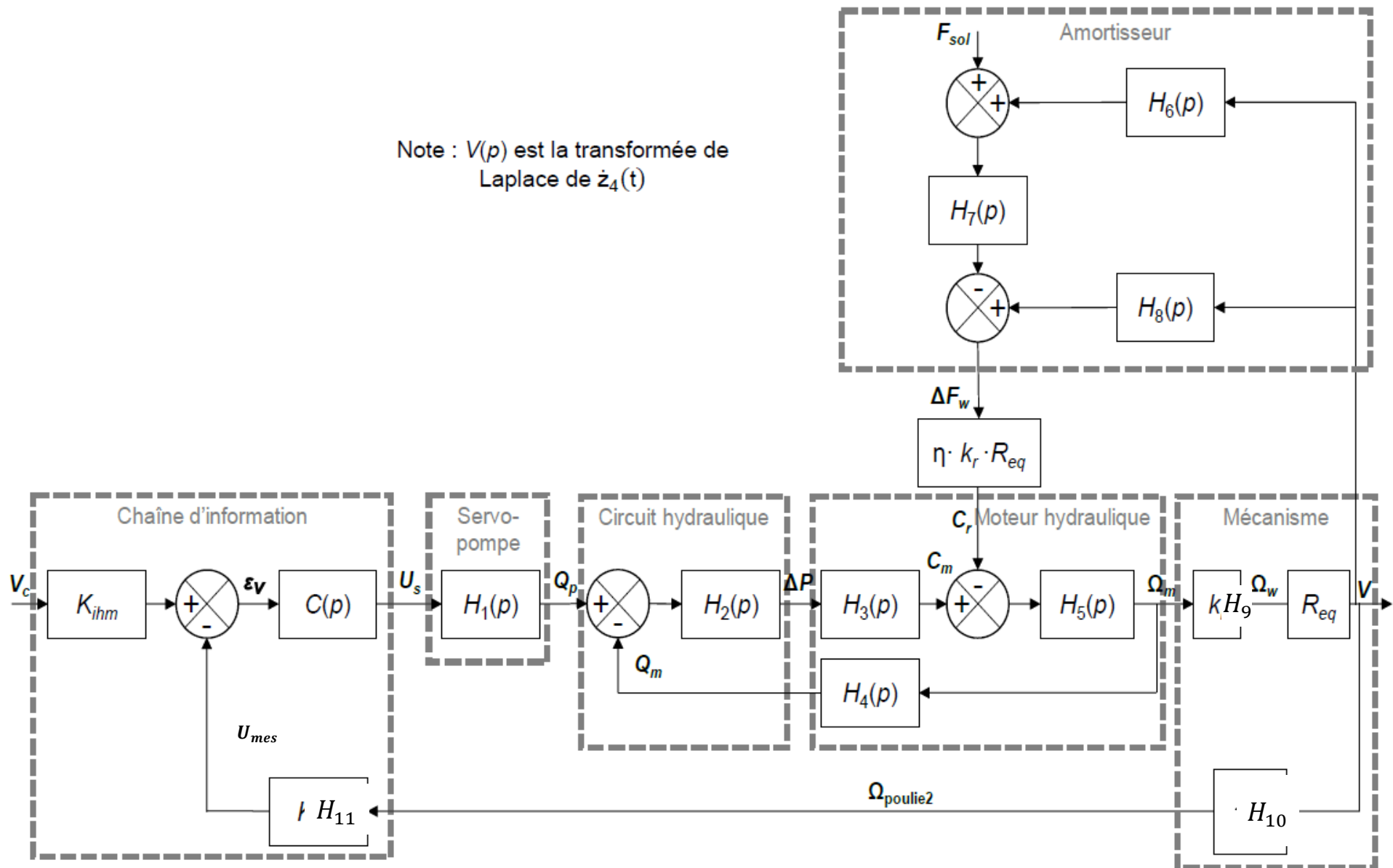
On note :

- $P(x,y,0)$, un point courant de contact entre le sol et les chenilles. Attention, x est négatif sur la figure ci-dessous. Les grandeurs dx et dy sont les dimensions du domaine surfacique élémentaire autour du point P entre le sol et les chenilles ;
- $p_g(y) = A \cdot \frac{y}{L} + B$, la pression du sol 0 sur la chenille gauche cg au point $P(x,y,0)$ où A et B , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- $p_d(y) = C \cdot \frac{y}{L} + D$, la pression du sol 0 sur la chenille droite cd au point $P(x,y,0)$ où C et D , homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- $L = 5,4 \text{ m}$, la longueur et $l = 1 \text{ m}$ la largeur de chaque chenille ;
- $a = 2,1 \text{ m}$, la distance moyenne sur l'axe $\vec{x}$ d'une chenille au centre O de la machine.



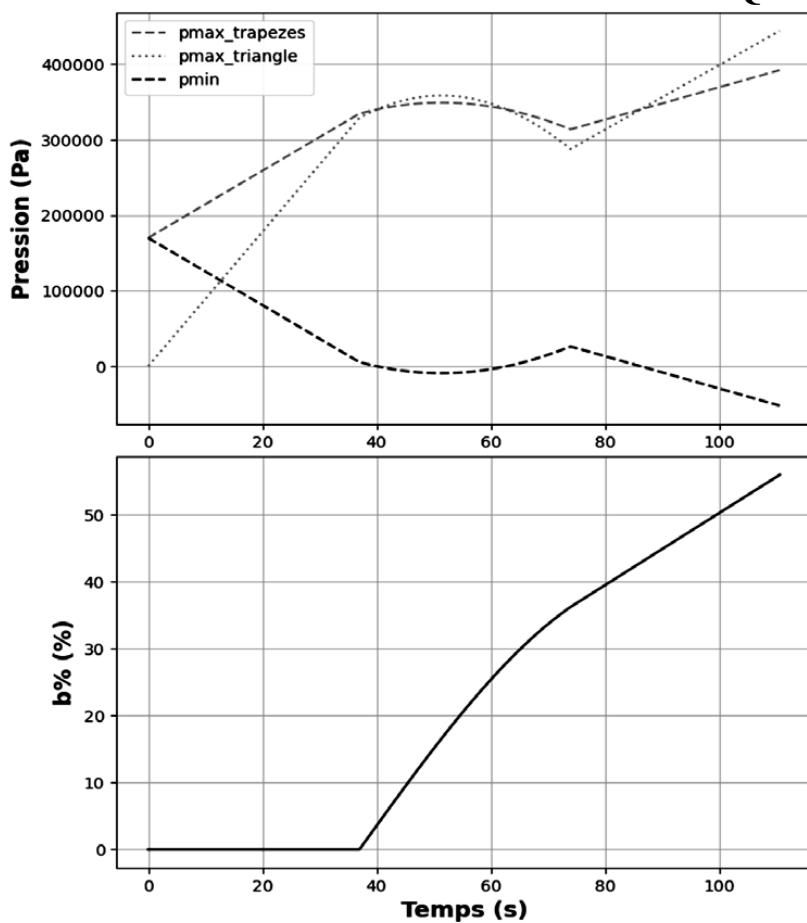
ANNEXE 2 - Schéma-bloc : modélisation de l'asservissement

Note : $V(p)$ est la transformée de Laplace de $\dot{z}_4(t)$

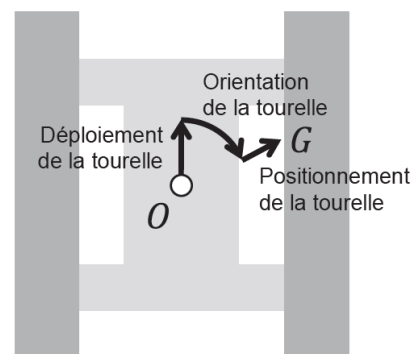


DOCUMENT REPONSES

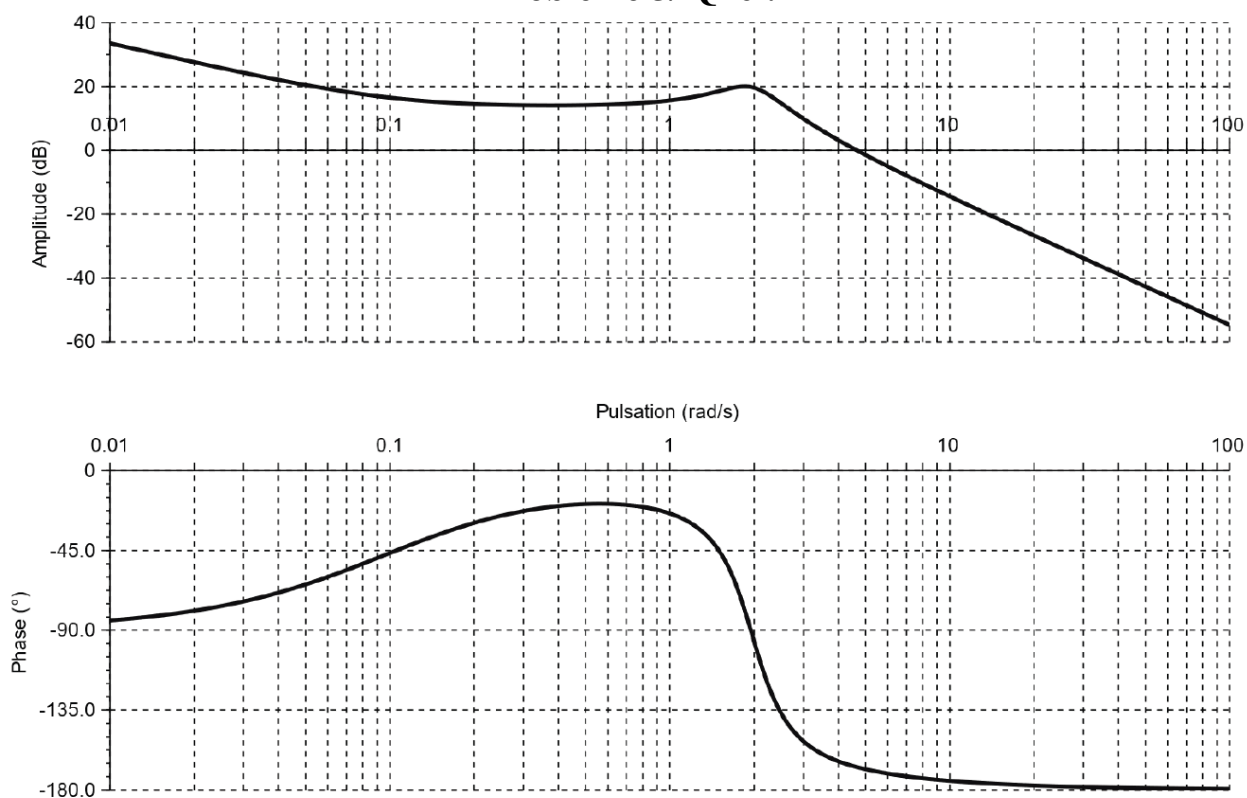
Problème 5/ Q10 :



Évolutions théoriques des pressions
estimées par l'ordinateur et du
pourcentage d'atteinte de la posture
critique de basculement



Problème 5/ Q26 :



Problème 5/ Q28

Réponses fréquentielles de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée du système sans (en train plein) et avec amortisseur (en pointillés)

