

Programme de colle - semaine 23 du 30/03/2026 au 05/04/2026

(*) : démonstrations à savoir.

1 Fractions rationnelles

- Donner un exercice (simple) comportant une décomposition en éléments simples à tout le monde.
- L'important est avant tout la pratique donc on évitera les calculs inutilement compliqués ou les exercices abstraits. La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.
- Forme irréductible, degré, fonction rationnelle associée, racine (ou zéro), pôle, multiplicité.
- Partie entière d'une fraction rationnelle : caractérisation, obtention (*)
- Existence et unicité d'une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ (savoir énoncer la forme générale de la décomposition. La démonstration est hors-programme). Seul le calcul du coefficient d'un pôle simple est officiellement au programme.
Astuce principale : multiplier puis évaluer.
Nous avons vu quelques autres astuces : utilisation des limites, évaluation en un point, utilisation de la DES complexe pour trouver la DES réelle, parité.
- Savoir écrire la forme générale de la DES pour tout type de fraction (en laissant les coefficients indéterminés).
- Applications aux calculs de certaines primitives et sommes.
- Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ (aucun exercice fait).

2 Séries numériques

- C'est le tout début, plusieurs résultats importants n'ont pas encore été vus. Se limiter strictement aux exercices utilisant les résultats ci-dessous.
- On pourra donner un exercice de calcul de sommes partielles (en lien avec les fractions rationnelles), ou un exercice d'étude de convergence à partir d'une inégalité facile à voir (ou donnée en indication).
- Suite des sommes partielles d'une suite numérique (à valeurs complexes). Convergence d'une série. Somme d'une série convergente. Relation de Chasles. Reste d'ordre n .
La nature de la série ne dépend pas du rang initial et n'est pas modifiée quand on change un nombre fini de termes.
- Condition nécessaire de convergence : si $\sum_n u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (*).
La condition n'est pas suffisante (connaître au moins 2 contre-exemples).
- Somme télescopique, équivalence entre la convergence de (u_n) et de $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$.
- Série géométrique $\sum_n q^n$ ($q \in \mathbb{C}$). Convergence ssi $|q| < 1$ et valeur de la somme si convergence (*).
- Série exponentielle : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ (convergence de la série pour tout $z \in \mathbb{C}$) (démonstration à savoir dans le cas où $z \in \mathbb{R}$).
- Nature des séries $\sum_n \frac{1}{n}$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$.
- Suites à termes positifs : la série converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.
Comparaison de deux séries à termes positifs : si $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ aussi (*).
- Convergence absolue. **Elle entraîne la convergence** : si $\sum_n |u_n|$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge et

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$
Réciproque fausse.

- Utilisation des équivalents : PAS VU.
- Utilisation des $o(\cdot)$, $O(\cdot)$: PAS VU.
- Comparaison série-intégrale : PAS VU.
- Série de Riemann : PAS VU sauf $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$.
- Série alternée : PAS VU.

3 Exercices faits

1. Convergence et valeur de la série harmonique alternée

Questions déjà faites, mais pas récemment. Voir TD 16 exercice 6 et TD 26 exercice 5.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
- En déduire que la série de terme général u_n converge.
- (Calcul de la somme, première méthode)

Déterminer par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

On pourra écrire S_n sous forme intégrale en partant de $\int_0^1 t^{k-1} dt$.

- (Calcul de la somme, deuxième méthode)

Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à $\ln$ entre 1 et 2 à l'ordre n . En déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Étudier la nature de la série de terme général u_n , puis si elle converge, calculer sa somme.

3. Séries $\sum_n u_n$ étudiées en utilisant uniquement des inégalités :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^2 + 1}$$

$$u_n = \frac{1}{n + \sin(n)}$$

$$u_n = \sqrt{n^4 + 1} - n^2.$$

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \text{ (calcul explicite des sommes partielles possible)}$$