MPSI

Programme de colle - semaine 24 du 20/04/2026 au 26/04/2026

1 Séries : chapitre complet

- Donner à tout le monde un “exo-minute” portant sur l’étude de la nature d’une série à l’aide d’un des principaux critères (inégalités, équivalent, domination / négligeabilité, convergence absolue, séries alternées).
- Généralités (rappel colle précédente) : suite des sommes partielles d’une suite numérique. Convergence d’une série. Somme d’une série convergente. Relation de Chasles. Reste d’ordre n. Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0.
- Série géométrique $\sum_n q^n$ $(q \in \mathbb{C})$. Convergence ssi $|q| < 1$ et valeur de la somme si convergence. Série exponentielle.
- Suites à termes positifs : la série converge ssi la suite des sommes partielles est majorée. **Comparaison de deux séries à termes positifs** : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ aussi.
- Convergence absolue. **Elle entraîne la convergence** : si $\sum_n |u_n|$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge et $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.
- **Utilisation des équivalents :** si $u_n \sim v_n \geqslant 0$, alors $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature (*).
- **Utilisation des** $o(\cdot)$**,** $O(\cdot)$ **:** si $u_n = O(v_n)$, $v_n \geqslant 0$ et $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ CVA.
- Comparaison série-intégrale : pas de propriété au programme, juste la méthode à connaître : pour f continue monotone, comparer $f(k)$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $f(k+1)$, et sommer (entre des bornes finies) pour en déduire un encadrement des sommes partielles.
- **Série de Riemann** $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$: converge ssi $\alpha > 1$.
  (*) : ne pas aller jusqu’au bout de la démonstration mais pour $\alpha > 0$, être capable d’écrire un encadrement des sommes partielles entre des intégrales puis, dans le cas où $\alpha = 1$, en déduire un équivalent de S_n.
- **Série alternée** : si (v_n) est décroissante et tend vers 0, alors $\sum_n (-1)^n v_n$ converge (*). Signe de la somme et majoration de la valeur absolue de la somme par celle du premier terme (pas d’exercice fait sur ces deux derniers points).
  L’étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

2 Dénombrements

- *Parmi les propriétés ci-dessous, les plus intuitives sont admises sans démonstration.*
- Cardinal d’un ensemble fini. Deux ensembles finis sont de même cardinal ss’il existe une bijection entre les deux. Cardinal d’une réunion de 2 ensembles, de n ensembles disjoints. *La formule du crible est hors-programme.*
- Produit cartésien, n-liste (n-uplet). Dénombrement des n-listes de E, de l’ensemble des applications de E dans F.
- p-liste d’éléments distincts d’un ensemble E. Dénombrement (“démonstration” pour $n = 2$).
  Permutation d’un ensemble fini E, dénombrement.
- Combinaison/partie, dénombrement des p-combinaisons (*). Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ (*).
  Démonstration des formules du type $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ à l’aide de raisonnements ensemblistes.
- Dans cette colle, aucune connaissance n’est exigible sur les probabilités. Les questions “trouver la probabilité de . . .” se ramèneront toujours à diviser le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

3 Exercices

Ne pas passer trop de temps dessus.

1. **CCINP exo 7**

   a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que :
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

   b) Étudier la convergence de la série
   $$\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + i)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$$

2. **CCINP exo 46**
   On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

   a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.

   b) En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

   c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

3. On distribue au hasard une main de 8 cartes d'un jeu de 32.

   a) Modéliser l'épreuve (définir un ensemble qui modélise l'ensemble des situations possibles). Combien y a-t-il de mains possibles ?

   b) Questions déjà cherchées : calculer la probabilités des événements suivants :

      i) N'avoir que des cartes noires (piques, trèfles).

      ii) Avoir les 4 as ou les 2 rois rouges.

4. **d'après CCINP 112**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
   On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

   a) **Question rajoutée :** Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer le nombre u_k de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $\operatorname{card} B = k$ et $A \subset B$.

   b) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.