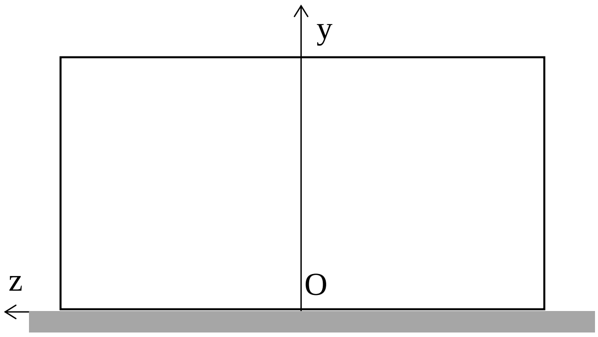
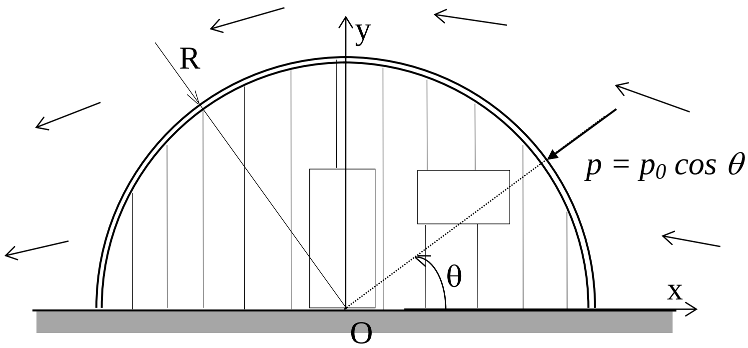
Exercice :

Le hangar ci-dessous, demi-cylindrique de rayon *R* et de longueur *L* selon z, est soumis à un vent horizontal. On peut approximer la pression *p* agissant sur la toiture par $p_0 \cos\theta$. La pression est donc positive du côté du hangar qui est au vent (x > 0) et négative du côté sous le vent (x < 0).

Déterminer le torseur en O représentant l'action du vent sur le hangar.





Corrigé

$$T_{vent\to hangar} = \left\{ \begin{array}{r} \vec{R}_{vent\to hangar} = \int -p(M)\vec{n}(M)ds \\ \vec{M}_{O,vent\to hangar} = \int -\vec{OM} \wedge p(M)\vec{n}(M)ds \end{array} \right\}_O$$

$p(M) = p_0 \cos\theta \qquad \vec{n}(M) = \vec{er}$

$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M} = z\,\vec{z} + R\vec{er}$ (M' projeté de M sur l'axe (O,z))

$ds = Rd\theta dz$ avec $\theta \in [0, \pi]$ et $z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right]$

$$\vec{R}_{vent\to hangar} = \int -p(M)\vec{n}(M)ds = \iint -p_0 \cos\theta \, Rd\theta dz\vec{er}$$

On projette :

$$\vec{R}_{vent\to hangar}.\vec{x} = \iint -p_0 \cos\theta \, Rd\theta dz\vec{er}.\vec{x} = -p_0 R \iint \cos^2\theta \, d\theta dz = -p_0 R \int_0^{\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_{-L/2}^{L/2} dz$$

- $\vec{R}_{vent\to hangar}.\vec{x} = \frac{-p_0 RL}{2} \int_0^{\pi} 1 + \cos 2\theta \, d\theta = \frac{-p_0 RL}{2} \left[\theta + \frac{\sin\theta}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{-p_0 RL}{2} \pi$
- $\vec{R}_{vent\to hangar}.\vec{y} = \iint -p_0 \cos\theta \, Rd\theta dz\vec{er}.\vec{y} = -p_0 R \iint \cos\theta \sin\theta \, d\theta dz = \frac{-p_0 RL}{2} \left[\frac{X^2}{2} \right]_{\sin 0}^{\sin\pi} = 0$
- $\vec{R}_{vent\to hangar}.\vec{z} = \iint -p_0 \cos\theta \, Rd\theta dz\vec{er}.\vec{z} = 0$

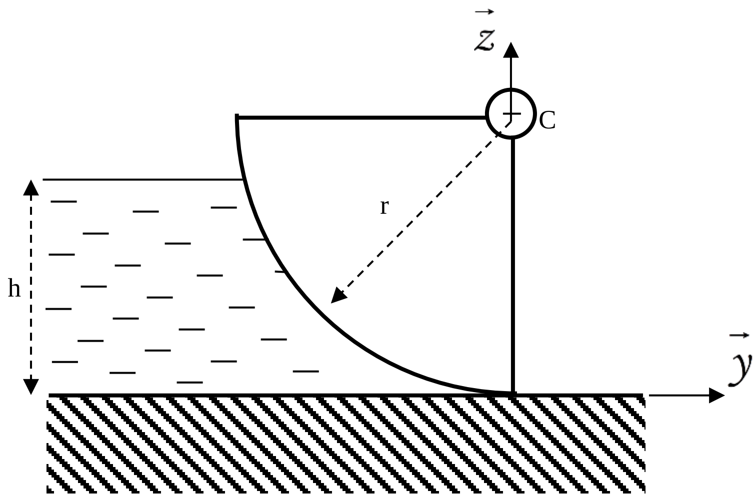
$$\vec{M}_{O,vent\to hangar} = \int -\vec{OM} \wedge p(M)\vec{n}(M)ds = \iint (z\,\vec{z} + R\vec{er}) \wedge (-p_0 \cos\theta \, Rd\theta dz\vec{er}) = -p_0 R \iint z\cos\theta \, d\theta dz\vec{e}_\theta$$

On projette :

- $\vec{M}_{O,vent\to hangar}.\vec{x} = -p_0 R \iint z\cos\theta \, d\theta dz\vec{e}_\theta.\vec{x} = p_0 R \iint z\cos\theta \sin\theta \, d\theta dz = p_0 R \int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_{-L/2}^{L/2} z dz = 0$
- $\vec{M}_{O,vent\to hangar}.\vec{y} = -p_0 R \iint z\cos\theta \, d\theta dz\vec{e}_\theta.\vec{y} = p_0 R \iint z\cos^2\theta d\theta dz = 0$
- $\vec{M}_{O,vent\to hangar}.\vec{z} = -p_0 R \iint z\cos\theta \, d\theta dz\vec{e}_\theta.\vec{z} = 0$

Exercice :

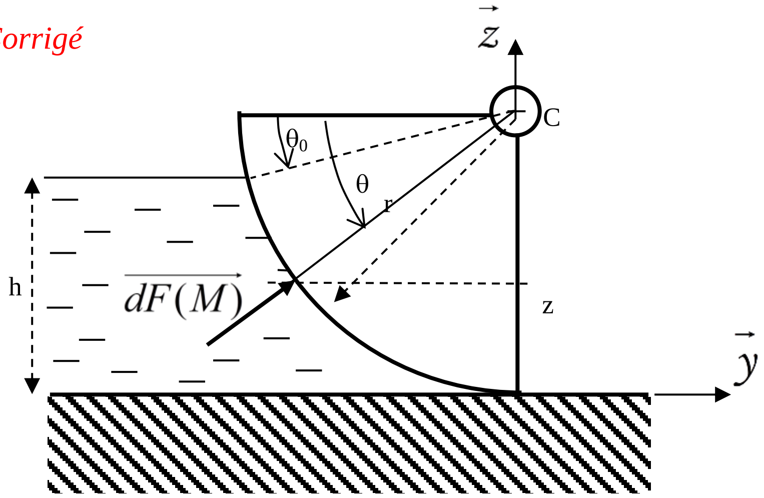
Une vanne secteur de rayon r et de longueur L est schématisée sur le dessin ci-contre.
Elle assure la retenue d'une hauteur h d'eau.



A.N.: $\rho_{eau} = 1\ kg.l^{-1}$; $g = 9.81\ m.s^{-2}$; $r = 1.2$ m
L = 1 m ; h = 0.6 m

1. *Exprimer la densité surfacique d'effort de l'action hydrostatique de l'eau sur la vanne.(remarque : cette densité dépend de l'altitude du point où elle est exprimée)*
2. *Montrer que la résultante du torseur de l'action de l'eau sur la vanne s'écrit en projection suivant l'axe* $y : R_y = \frac{1}{2}\rho_{eau} g L h^2$
3. *Montrer que la résultante du torseur de l'action de l'eau sur la vanne s'écrit en projection suivant l'axe* $z :\ R_z = \rho_{eau} g L r \left[\frac{(h-r)}{r}\sqrt{(2r-h)h} + \frac{r}{2}\left(\frac{\pi}{2} - Arc\sin\left(\frac{r-h}{r}\right)\right) + \frac{r-h}{2r}\sqrt{(2r-h)h} \right]$
4. *Déterminer le moment en C du torseur de l'action de l'eau sur la vanne.*
5. *Faire les applications numériques*

Corrigé



Q1 : $\overrightarrow{dF(M)} = -\rho g(h-z)dS\vec{n}$

$$\begin{cases} z = r - r\sin\theta \\ dS = rd\theta L \\ \vec{n} = -\cos\theta\vec{y} - \sin\theta\vec{z} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R_{eau\to vanne}} = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \rho g(h - r + r\sin\theta)rd\theta L(\cos\theta\vec{y} + \sin\theta\vec{z})$$

Q2 : $R_y = \rho grL\left\{[(h-r)\sin\theta]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} + r\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$ **or** $\sin\theta_0 = \frac{r-h}{r}$

D'où $R_y = \frac{1}{2}\rho_{eau}gLh^2$

Q3 : $R_z = \rho grL\left\{[(r-h)\cos\theta]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r}{2}[\theta]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} - r\left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$

comme $\cos\theta_0 = \sqrt{1-\sin^2\theta_0} = \frac{1}{r}\sqrt{(2r-h)h}$ et $\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \frac{2(r-h)}{r^2}\sqrt{(2r-h)h}$

D'où $R_z = \rho_{eau}gLr\left[\frac{(h-r)}{r}\sqrt{(2r-h)h} + \frac{r}{2}(\frac{\pi}{2} - Arc\sin(\frac{r-h}{r})) + \frac{r-h}{2r}\sqrt{(2r-h)h}\right]$

Q4 : $\overrightarrow{dm(M)} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{dm(C)} = \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{M_{(C,eau\to vanne)}} = \vec{0}$

On obtient donc :

$$\{T_{eau\to vanne}\}_C = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\rho_{eau}gLh^2 & 0 \\ \rho_{eau}gLr\left[\frac{(h-r)}{r}\sqrt{(2r-h)h} + \frac{r}{2}(\frac{\pi}{2} - \theta_0) + \frac{r-h}{2r}\sqrt{(2r-h)h}\right] & 0 \end{matrix}\right\}_C$$

Q5 : A.N. : $\{T_{eau\to vanne}\}_C = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1770\ N & 0 \\ 4310\ N & 0 \end{matrix}\right\}_C$

Exercice :

Le dispositif représenté figure 1 permet de maintenir constant le niveau dans un bassin. A partir d'une certaine hauteur d'eau h, la vanne s'ouvre automatiquement sous l'action des forces de pression. Lorsque le niveau de l'eau a baissé, la vanne se referme sans intervention. La vanne a une forme rectangulaire de hauteur $b = 0{,}6\,m$ et de longueur $2L = 1m$ $(-L \le y \le L)$.

La vanne est articulée par rapport au barrage en A tel que $\overrightarrow{OA} = a.\vec{z}$
L'eau exerce sur la vanne une action mécanique définie par une densité surfacique d'effort : $f(M) = \rho_e.g.(h-z)$ où ρ_e est la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.
On donne : $\rho_e = 1kg/dm^3$ $\quad g = 9{,}81 m/s^2$ $\quad a = 0{,}27\,m$

Question 1 : *Déterminer en* ***O*** *le torseur d'action mécanique exercée par l'eau sur la vanne.*
Question 2 : *Déterminer la position du centre de poussée de l'eau sur la vanne (le centre de poussée est tel que l'action de l'eau sur la vanne soit modélisable par un glisseur). En déduire à partir de quelle hauteur h la vanne s'ouvre. Faire l'application numérique.*

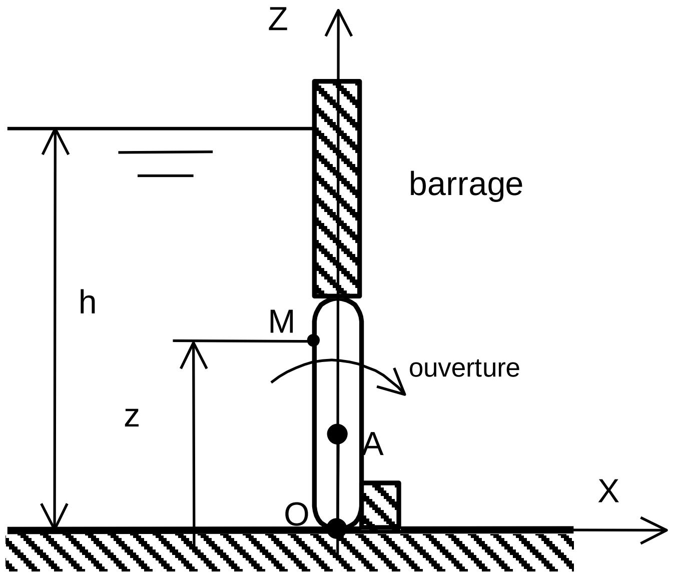


figure 1

Corrigé

Q1- <u>Modélisation locale</u> : $\overrightarrow{dF} = p(M).dS.\vec{x}$ et
$\overrightarrow{dM_M} = \vec{0}$, $\overrightarrow{dM_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} = (y.\vec{y} + z.\vec{z}) \wedge p(M).dS.\vec{x} = p(M).dS.(-y.\vec{z} + z.\vec{y})$
<u>Modélisation globale</u> : intégrons en coordonnées cartésiennes (dS = dy.dz)

$$\vec{F} = \rho_e.g.\int_0^b \int_{-L}^{L} (h-z).dy.dz.\vec{x} = \rho_e.g.2L.b.(h-\frac{b}{2}).\vec{x}$$

$$\overrightarrow{M_O} = \int_0^b \int_{-L}^{L} \overrightarrow{dM_O} = \rho_e.g.\int_0^b \int_{-L}^{L} (h-z).(-y.\vec{z} + z.\vec{y}).dy.dz = \rho_e.g.2L.b^2.(\frac{h}{2} - \frac{b}{3}).\vec{y}$$

Q2- Cherchons C tel que $\overrightarrow{M_C} = \vec{0}$; par symétrie, on a $\overrightarrow{OC} = c.\vec{z}$

$\overrightarrow{M_C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{CO} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ $\quad \Rightarrow$ On trouve : $\overrightarrow{OC} = b\dfrac{(\frac{h}{2} - \frac{b}{3})}{(h - \frac{b}{2})}\vec{z}$

La vanne s'ouvre automatiquement si c > a, soit $b\dfrac{(\frac{h}{2} - \frac{b}{3})}{(h - \frac{b}{2})} > a$ $\quad$ A.N. : $h > \dfrac{b.(2b-3a)}{3.(b-2a)} = 1{,}3m$