

Programme de colle - semaine 25 du 27/04/2026 au 03/05/2026

1 Algèbre linéaire

- On s'assurera que la notion de matrice d'une application linéaire est bien comprise.
- Matrice de passage d'une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' (notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$). $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ (*).
Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur ($X = PY$), sur la matrice d'une application linéaire ($Q^{-1}MP$) (*), d'un endomorphisme ($P^{-1}MP$).
- Matrices équivalentes. C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (*).
Toute matrice de rang r est équivalente à J_r . Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang (aucun exercice fait sur les matrices équivalentes).
Invariance du rang par transposition (*).
- Matrices semblables. C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si deux matrices sont semblables, alors elles ont la même trace (*). Trace d'un endomorphisme. Cas des projections, symétries : matrice dans une base adaptée à la somme directe.
Exemples de questions visant à montrer qu'une matrice donnée est semblable à une matrice (plus simple) donnée. Dans l'idéal, la démarche est à connaître entièrement, mais ne pas hésiter à donner des indications rapidement en cas de "blocage".
- Pour les notions de matrices équivalentes / semblables : savoir trouver des contre-exemples pour la réciproque. Exemple : donner 2 matrices carrées de même rang et de même trace et pas semblables.
- Opération sur les lignes/colonnes d'une matrice, interprétation en terme de produit matriciel. Recherche pratique du rang.
Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (*):
 A est inversible \Leftrightarrow les colonnes de A forment une famille libre \Leftrightarrow les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\}$.
- **PAS ENCORE VU** : hyperplan, forme linéaire.

2 Exercices

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que M est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donner une matrice de passage P telle que

$$A = P^{-1}MP.$$

b) En déduire une méthode pour calculer M^n .

On ne fera pas explicitement le calcul.

2. Exercice long, éventuellement ne donner que le a) ou que le reste. Ou alors commencer au c) en donnant la matrice diagonale à trouver.

Peut être donné avec une matrice plus simple (2×2).

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M .

- a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de $M - \lambda I_3$. *On pourra faire plusieurs cas, suivant la valeur de λ .*

- b) Déterminer trois réels distincts λ_i ($i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$) tels que l'équation $MX = \lambda_i X$ admette des solutions $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ non nulles, et pour chacune des valeurs de λ , déterminer une base de l'ensemble des solutions.
- c) Déterminer une base \mathcal{B} de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.
- d) Déterminer une matrice P inversible, telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

3. Soit $E = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), u'' + 4u' + 4u = 0\}$

Soit $f: E \longrightarrow E$

$$u \longmapsto u'$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et calculer $\text{tr}(f)$.