MPSI

Programme de colle - semaine 26 du 04/05/2026 au 10/05/2026

1 Forme linéaire, hyperplan, sous-espace affine

Peu d'exercices faits. L'essentiel est de comprendre les 3 caractérisations d'un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle, supplémentaire d'une droite, dimension)

- Forme linéaire dans un espace vectoriel. Formes coordonnées dans une base.
- Hyperplan (vectoriel) : c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
  Si H est un hyperplan de E et si $u_0 \in E \setminus H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}u_0$ (*).
  Inversement, si H est un SEV de E et D une droite vectorielle vérifient $E = H \oplus D$, alors H est un hyperplan de E.
  Caractérisation des hyperplans en dimension finie.
- Sous-espace affine d'un espace vectoriel. En pratique, on n'utilise cette notion que pour les plans ou droites affines dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ainsi que dans le cadre de la propriété suivante :
  Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $a \in F$. Si l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E, de direction $\operatorname{Ker} f$.

2 Probabilités (sans variable aléatoire)

- **Attention, à cause du 1$^{\text{er}}$ mai, nous n'avons pas eu de séance de TD cette semaine donc très peu d'exercices faits !**
- Expérience aléatoire, événement, univers, système complet d'événements.
- Probabilité (sur un ensemble fini) : définition. Espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$.
  Propriétés (complémentaire, réunion, croissance, ...). La formule du crible est hors-programme.
  Détermination d'une probabilité sur les singletons. Équiprobabilité.
- Probabilité conditionnelle : définition, propriétés.
  Si B est un événement tel que $\mathbf{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbf{P}_B$ est une probabilité sur Ω.
- Formule des probabilités totales (2 formes : intersections et probabilités conditionnelles).
  Par convention, si $\mathbf{P}(B) = 0$, on pose $\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) = 0$.
- Formule de Bayes.
- Formule des probabilités composées (seulement énoncée, aucun exercice fait).
- **PAS VU :** Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de n événements ($n \geqslant 3$).

3 Exercices

Les exercices de probabilités ci-dessous n'ont pas encore été cherchés à ce stade. Ne pas hésiter à donner des indications en cas de blocage sur les questions de probabilités.

1. A et B étant des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ données, on étudie l'équation

$$(E)\ :\ X + (\operatorname{tr} X)A = B \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & X + (\operatorname{tr} X)A \end{array}$

Les parties a) et b) sont indépendantes.

a) Cas où $\operatorname{tr} A = 0$.
En procédant par analyse-synthèse, montrer que (E) a une unique solution et donner son expression.

b) Cas où $\operatorname{tr} A \neq 0$.
Soit H l'ensemble des matrices nulles : $H = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \operatorname{tr}(X) = 0\}$.

i) Montrer rapidement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathbb{K}A$.
ii) Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette somme directe. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
iii) En déduire que φ est bijective si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq -1$.
iv) Exprimer $\operatorname{tr} \varphi$ en fonction de A.

2. **Exo CCINP 105**

a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
b) On dispose de 100 dés dont 25 pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.

i) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
iii) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

3. **D'après exo CCINP 101**

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "l'animal est en A (resp. B, C) après son n^{e} trajet."
On pose $\mathbf{P}(A_n) = a_n$, $\mathbf{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbf{P}(C_n) = c_n$.

a) i) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
ii) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

i) Montrer que $\operatorname{Ker}(A + \frac{1}{2} I_3)$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$ et en donner une base.
ii) Montrer que A est semblable à une matrice D diagonale de la forme $D = \operatorname{diag}\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \alpha\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer.
iii) Déterminer une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.
Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

c) Montrer comment les résultats de la question b) peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

4. **Exo CCINP 107**

On peut modifier les données.
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n^{e} tirage est blanche". et on pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.

a) Calculer p_1.

b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.