

Problème:

Q1 : à l'équilibre, $\dot{\alpha}(t) = 0$ et $\alpha(t) = \alpha_{eq}$. L'équation donnée s'écrit :

$$C_0 - k(\alpha_{eq} - \alpha_0) + d g_M M \sin \alpha_{eq} = 0$$

D'où : $C_0 = k(\alpha_{eq} - \alpha_0) - d g_M M \sin \alpha_{eq}$

Q2 :

Avec $\alpha_{eq} = \alpha_0$, on adapte le calcul du moment de la pesanteur effectué ci-dessus pour obtenir, dans les positions extrêmes de la masselotte :

$$\overrightarrow{M}_{pes \rightarrow 2}(O_1) \cdot \vec{z}_1 = d g_M (M - m) \sin \alpha_0 + (d \pm \frac{c}{2}) g_M m \sin \alpha_0 = \overrightarrow{M}_{pes \rightarrow 2}(O_1) \cdot \vec{z}_1 \text{ (sans défaut)} \pm \frac{c}{2} g_M m \sin \alpha_0$$

On peut donc faire varier le moment $\Delta M = \pm \frac{c}{2} g_M m \sin \alpha_0$

A.N. : $\Delta M = \frac{18}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$ d'où $\Delta M \approx 1.10^{-3} \text{ N.m} > 0.9 \text{ N.mm}$

1.1 est bien respectée

Q3 :

$$\vec{\sigma}_{O_1,2/R_0} = \bar{I}_{(0_1,2)} \vec{\Omega}_{2/0} + M \overrightarrow{O_1 G} \wedge \vec{V}_{O_1,2/R_0}$$

avec $\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\alpha}(t) \vec{z}_1$

et $\vec{V}_{O_1,2/R_0} = \vec{V}_{O_1,2/1} + \vec{V}_{O_1,1/R_0} = \vec{0} + V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1$

d'où $\vec{\sigma}_{O_1,2/R_0} = \dot{\alpha}(t) J \vec{z}_1 + M(d \vec{y}_2) \wedge (V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1)$

$$\vec{\sigma}_{O_1,2/R_0} = [\dot{\alpha}(t) J - M d (V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha)] \vec{z}_1$$

Q4 :

$$\vec{\delta}_{O_1,2/R_0} = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{O_1,2/R_0} \Big|_{R_0} + M \vec{V}_{O_1/R_0} \wedge \vec{V}_{G,2/R_0}$$

$$\vec{V}_{O_1/R_0} = \vec{V}_{O_1,2/R_0} = \vec{V}_{O_1,1/R_0} = V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1$$

$$\vec{V}_{G,2/R_0} = \vec{V}_{G,2/1} + \vec{V}_{G,1/R_0} = \vec{V}_{O_1,2/1} + \overrightarrow{G O_1} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{V}_{O_1,1/R_0} = -d \vec{y}_2 \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_1 + V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1$$

D'où $\vec{V}_{G,2/R_0} = -d \dot{\alpha} \vec{x}_2 + V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1$

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{V}_{O_1/R_0} \wedge \vec{V}_{G,2/R_0} &= (V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1) \wedge (-d \dot{\alpha} \vec{x}_2 + V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1) \\ &= (V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1) \wedge (-d \dot{\alpha} \vec{x}_2) \\ &= d \dot{\alpha} (-V_x \sin \alpha + V_y \cos \alpha) \vec{z}_1 \end{aligned}$$

d'où $\vec{\delta}_{O_1,2/R_0} = [J \ddot{\alpha} - M d (-V_x \dot{\alpha} \sin \alpha + \dot{V}_x \cos \alpha + V_y \dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{V}_y \sin \alpha) + M d \dot{\alpha} (-V_x \sin \alpha + V_y \cos \alpha)] \vec{z}_1$

soit après simplification : $\vec{\delta}_{O_1,2/R_0} = J \ddot{\alpha} - d M \underbrace{(\dot{V}_x \cos \alpha + \dot{V}_y \sin \alpha)}_{\gamma_{x_2}(t)}$

Remarque : On retrouve bien uniquement les composantes de la dérivée de $\vec{V}_{O_1,1/R_0} = (V_x(t) \vec{x}_1 + V_y(t) \vec{y}_1)$ en projection sur \vec{x}_2 d'où le nom γ_{x_2} .

Q5 :

On pose $\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta \alpha(t)$

Ainsi, $\dot{\alpha}(t) = \dot{\Delta \alpha}(t)$ et $\ddot{\alpha}(t) = \ddot{\Delta \alpha}(t)$

A l'ordre 1, on a : $\sin(\underbrace{\alpha_0 + \Delta \alpha(t)}_{\alpha(t)}) = \sin \alpha_0 + \Delta \alpha(t) \cos \alpha_0 + O(\Delta \alpha^2)$

d'où $J \ddot{\Delta \alpha} + \mu \dot{\Delta \alpha} + k \Delta \alpha = d M g_M \Delta \alpha(t) \cos \alpha_0 + d M \gamma_{x_2} + \frac{d M g_M \sin \alpha_0 + C_0}{=0 \text{ d'après Q1 avec } \alpha_{eq} = \alpha_0}$

Q6 :

Dans les condition de Heaviside, (eq. 2) donne : $Jp^2\alpha(p) + \mu p\alpha(p) + k\alpha(p) = dMg_M\alpha(p) \cos \alpha_0 + dM\gamma_{x_2}(p)$

$$\text{d'où } \frac{\alpha(p)}{\gamma_{x_2}(p)} = \frac{dM}{(k - dMg_M \cos \alpha_0) + \mu p + Jp^2}$$

$$\text{soit } \frac{\alpha(p)}{\gamma_{x_2}(p)} = \frac{\frac{dM}{k - dMg_M \cos \alpha_0}}{1 + \frac{\mu}{k - dMg_M \cos \alpha_0} p + \frac{J}{k - dMg_M \cos \alpha_0} p^2}$$

Cette fonction d'ordre 2 est stable si tous les coefficients de son dénominateur sont de même signe, donc si $k - dMg_M \cos \alpha_0 > 0$, soit $k > dMg_M \cos \alpha_0$

Il faut donc un ressort de raideur k suffisante pour maintenir le système dans un état stable. C'est lui qui permet de compenser le moment de la pesanteur qui déséquilibre ce pendule inversé.

Q7 :

$$\text{On identifie : } A = \frac{dM}{k - dMg_M \cos \alpha_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k - dMg_M \cos \alpha_0}{J}}$$

$$\text{et } \xi = \frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{\mu}{k - dMg_M \cos \alpha_0} = \frac{\mu}{2\sqrt{J(k - dMg_M \cos \alpha_0)}}$$

Q8 :

A est maximal si $k - dMg_M \cos \alpha_0$ est minimal, donc si $\cos \alpha_0$ est maximal : $\alpha_0 = 0$ donne la meilleur amplification.

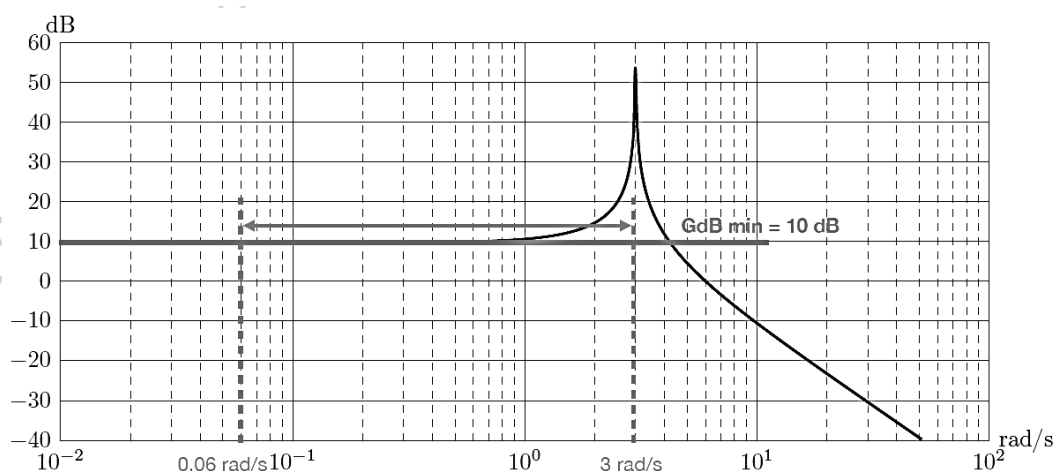
Q9 :

FIGURE A

On constate que le Gain décibel est bien supérieur à 10dB entre 0.06 et 3 rad/s : l'exigence 2.2 est respectée.

Remarque : On peut constater que 2.1 est bien validée également pour $A = 10$ dB, ce qui correspond à $A = 3.1 \text{ rad.m}^{-1}.\text{s}^2$.

Q10 :

Avec $U_C(p) = 0$, on obtient par lecture sur le schéma-blocs :

$$U(p) = \frac{K_D}{K + Jp^2} \left[dM\gamma_{x_2}(p) + \frac{K_H}{1 + \tau_{HP}} K_1 p (-U(p)) \right]$$

$$\text{d'où } \frac{U(p)}{\gamma_{x_2}(p)} = \frac{\frac{dMK_D}{K + Jp^2}}{1 + \frac{K_D}{K + Jp^2} \cdot \frac{K_H}{1 + \tau_{HP}} K_1 p}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{dMK_D(1 + \tau_{HP})}{(K + Jp^2)(1 + \tau_{HP}) + pK_DK_HK_1} \\
&= \frac{dMK_D}{K} \frac{1 + \tau_{HP}}{1 + p\left(\tau_H + \frac{K_DK_HK_1}{K}\right) + p^2\frac{J}{K} + p^3\frac{J\tau_H}{K}} = K_{HF} \frac{1 + a_1p}{1 + b_1p + b_2p^2 + b_3p^3}
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'identifier $K_{HF} = \frac{dMK_D}{K}$; $a_1 = \tau_H$; $b_1 = \left(\tau_H + \frac{K_DK_HK_1}{K}\right)$; $b_2 = \frac{J}{K}$; $b_3 = \frac{J\tau_H}{K}$

Q11 :

Les pôles sont à partie réelles négatives dans tous les cas présentés, donc $H_\gamma(p)$ correspond toujours à un système stable.

On élimine $K_1 = 0.05$ s car le résultat ne doit pas présenter de résonance. Pour obtenir une Bande Passante à -3dB maximale et respecter l'exigence 3.1, il faut choisir $K_1 = 0.5$ s. Cependant, l'exigence 3.3 n'est respectée dans aucun des cas : à très basse fréquence ($\omega < 0.06$ rad/s), on a toujours une amplification supérieure à 110 dB.

Ce correcteur ne permet pas de respecter l'intégralité des exigences proposées.

Q12 :

Pour $K_1 = 0.5$ s, on a trois pôles réels négatifs, on note alors :

$$H_\gamma(p) = \frac{K_{HF}(1 + \tau_H)}{\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(1 - \frac{p}{p_2}\right)\left(1 - \frac{p}{p_3}\right)}$$

or $\tau_H = 0.001$ s d'après l'annexe 4 et par lecture dans la Table 4, $-\frac{1}{p_1} = 0.001$ s. Donc en simplifiant :

$$H_\gamma(p) = \frac{K_{HF}}{(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)}$$

avec $\tau_2 = -\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{-2/3} = 1.5$ s et $\tau_3 = -\frac{1}{p_3} = 0.1$ s.

Q13 :

La fonction de transfert en boucle ouverte ne possède pas d'intégrateur (classe nulle) donc le gain de la fonction de transfert en boucle fermée (vis-à-vis de l'entrée en consigne) n'aura pas un gain unitaire. Le système ne sera pas précis en réponse à un échelon de consigne. [L'exigence 3.2 n'est pas respectée].

On lit sur le diagramme de Bode Figure 5 que $G_{dB} < 110$ dB pour $\omega > 0.7$ rad/s, or on veut $G_{dB} \geq 110$ dB jusqu'à $\omega = 3$ rad/s, l'exigence 3.3 n'est pas respectée.

Q14 :

La FTBO possède un intégrateur avant la perturbation grâce à la correction PI, l'erreur statique est donc nulle en réponse à un échelon d'accélération (qui est la perturbation dans ce schéma-blocs), 3.2 est respectée.

Justification par le calcul : on traduit le schéma figure 6.

$$U(p) = \frac{K_D}{K(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)} \left(dM\gamma_{x2}(p) - \frac{K_B}{1 + \tau_Bp} \frac{K_4(1 + \tau_4p)}{p} U(p) \right)$$

$$\text{D'où : } U(p) \left(1 + \frac{K_D}{K(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)} \frac{K_B}{1 + \tau_Bp} \frac{K_4(1 + \tau_4p)}{p} \right) = \frac{K_D}{K(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)} dM\gamma_{x2}(p)$$

$$\Rightarrow U(p) \frac{K(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)(1 + \tau_Bp)p + K_DK_BK_4(1 + \tau_4p)}{K(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)(1 + \tau_Bp)p} = \frac{K_D}{K(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)} dM\gamma_{x2}(p)$$

$$\Rightarrow U(p) = \frac{K_D(1 + \tau_Bp)p}{K(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)(1 + \tau_Bp)p + K_DK_BK_4(1 + \tau_4p)} dM\gamma_{x2}(p)$$

En appliquant le TVF avec un échelon unitaire pour la perturbation γ_{x2} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p U(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_D(1 + \tau_Bp)p}{K(1 + \tau_2p)(1 + \tau_3p)(1 + \tau_Bp)p + K_DK_BK_4(1 + \tau_4p)} dM \cdot \frac{1}{p} = 0$$

Q15 :

$$H_{BO} = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_4(1 + \tau_4 p)}{p} \cdot \frac{K_B}{1 + \tau_B p} \cdot \frac{K_D}{K(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

Or $\tau_B = 0.1$ s, $\tau_2 = 1.5$ s et $\tau_3 = 0.1$ s. Ainsi on pose $\tau_4 = \tau_2 = 1.5$ s afin de compenser le pôle dominant du système et optimiser la rapidité.

Q16 :

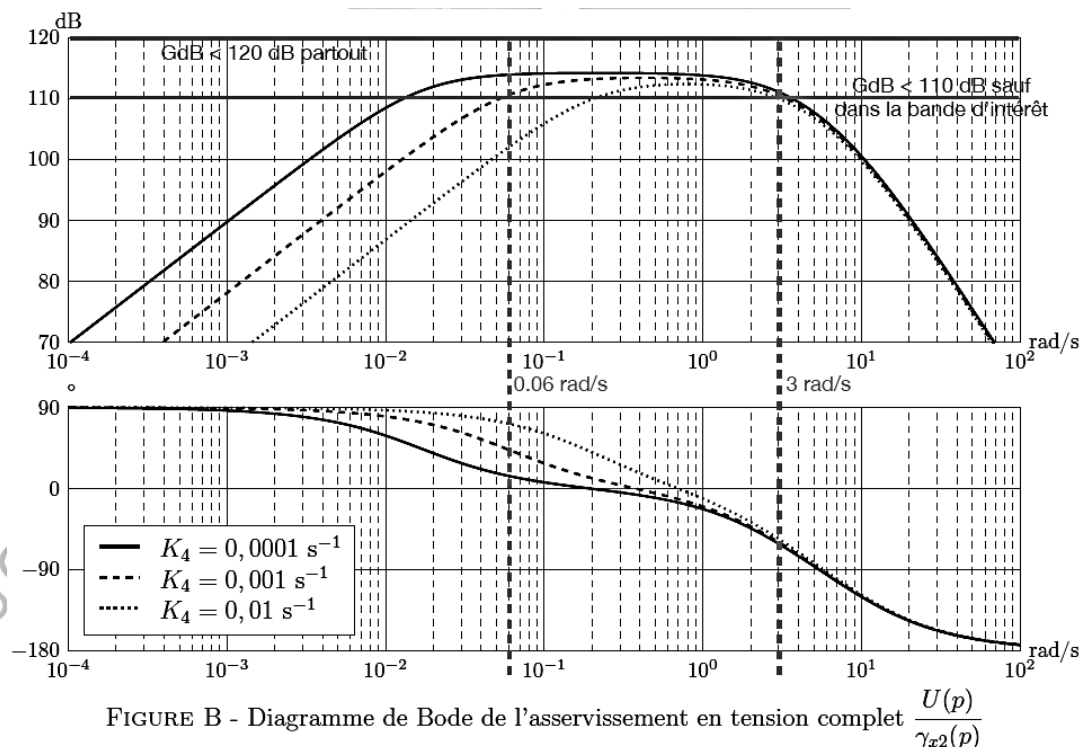


FIGURE B - Diagramme de Bode de l'asservissement en tension complet $\frac{U(p)}{\gamma_{x2}(p)}$

Tous les signaux respectent l'exigence 3.4 car tous les gains sont bien inférieurs à 120 dB.

Le gain $K_4 = 0.001$ s⁻¹ permet bien d'amplifier à plus de 110 dB dans la bande d'intérêt mais pas à l'extérieur

de celle-ci : c'est le seul à respecter complètement l'exigence 3.3.

Q17 :

Un filtre passe-bande permet de sélectionner les fréquences d'intérêt (celles des séismes ici) et de les amplifier tout en :

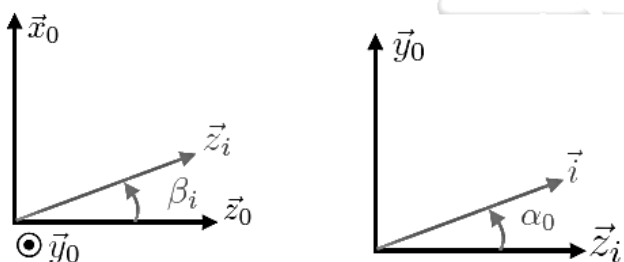
- éliminant le bruit (à HF).
- restant autour d'une position d'équilibre (il n'y a pas d'influence des séismes ou autres perturbations à très basses fréquences, c'est à dire en statique).

Q18 :

On définit P telle que :

$$\begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_w \\ \gamma_v \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} = P \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

On trace les figures planes suivantes valables pour $i \in \{u, v, w\}$:



En projetant : $\vec{i} = \cos \alpha_0 \vec{z}_i + \sin \alpha_0 \vec{y}_0 = \cos \alpha_0 (\cos \beta_i \vec{z}_0 + \sin \beta_i \vec{x}_0) + \sin \alpha_0 \vec{y}_0$

En remplaçant i par u, v et w , on obtient la matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \sin \beta_u & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_u \\ \cos \alpha_0 \sin \beta_v & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_v \\ \cos \alpha_0 \sin \beta_w & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \cos \beta_w \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Q19 :

Les applications numériques donnent alors :

$$\sin \beta_u = 0; \sin \beta_v = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \beta_w = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } \cos \beta_u = 1; \cos \beta_v = -\frac{1}{2}; \cos \beta_w = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } P = \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \alpha_0 & -\frac{\cos \alpha_0}{2} \\ -\cos \alpha_0 \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \alpha_0 & -\frac{\cos \alpha_0}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Remarque : On peut vérifier rapidement que $P^{-1}P = I_d$

Q20 :

$$\vec{\Gamma}_{O_1, 1/R_0}^* = \begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)} = \begin{pmatrix} \gamma_u + \varepsilon \\ \gamma_v + \varepsilon \\ \gamma_w + \varepsilon \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} \quad \text{donc } \begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_u + \varepsilon \\ \gamma_v + \varepsilon \\ \gamma_w + \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où par produit matriciel : } \gamma_{x_0}^* = (\gamma_v + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} - (\gamma_w + \varepsilon) \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha_0}$$

$$\text{soit } \gamma_{x_0}^* = \frac{\gamma_v - \gamma_w}{\sqrt{3} \cos \alpha_0}$$

$$\gamma_{y_0}^* = [(\gamma_u + \varepsilon) + (\gamma_v + \varepsilon) + (\gamma_w + \varepsilon)] \frac{1}{3 \sin \alpha_0}$$

$$\text{donc } \gamma_{y_0}^* = \left(\frac{\gamma_u + \gamma_v + \gamma_w}{3} + \varepsilon \right) \frac{1}{\sin \alpha_0}$$

$$\text{Et enfin : } \gamma_{z_0}^* = [2(\gamma_u + \varepsilon) - (\gamma_v + \varepsilon) - (\gamma_w + \varepsilon)] \frac{1}{3 \cos \alpha_0}$$

$$\text{soit } \gamma_{y_0}^* = \frac{2\gamma_u - \gamma_v - \gamma_w}{3 \cos \alpha_0}$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_v \\ \gamma_w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\gamma_u = \sin \alpha_0 \gamma_{y_0} + \cos \alpha_0 \gamma_{z_0}$$

$$\gamma_v = \cos \alpha_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{x_0} + \sin \alpha_0 \gamma_{y_0} - \frac{\cos \alpha_0}{2} \gamma_{z_0}$$

$$\text{et } \gamma_w = -\cos \alpha_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{x_0} + \sin \alpha_0 \gamma_{y_0} - \frac{\cos \alpha_0}{2} \gamma_{z_0}$$

En réintégrant cette forme dans les expressions encadrées ci-dessous, on obtient alors

$$\gamma_{x_0}^* = \frac{\cos \alpha_0 \sqrt{3} \gamma_{x_0}}{\sqrt{3} \cos \alpha_0} = \gamma_{x_0}$$

$$\gamma_{y_0}^* = \left(\frac{3 \sin \alpha_0 \gamma_{y_0}}{3} + \varepsilon \right) \frac{1}{\sin \alpha_0} = \gamma_{y_0} + \frac{\varepsilon}{\sin \alpha_0}$$

$$\gamma_{z_0}^* = \left(\cos \alpha_0 \gamma_{z_0} \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) \frac{1}{3 \cos \alpha_0} = \gamma_{z_0}$$

Seule la composante verticale de l'accélération est affectée par le bruit.

Remarque : Il est beaucoup plus rapide d'écrire :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{x_0}^* \\ \gamma_{y_0}^* \\ \gamma_{z_0}^* \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_w \\ \gamma_w \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon = \underbrace{P^{-1}P}_{I_d} \begin{pmatrix} \gamma_{x_0} \\ \gamma_{y_0} \\ \gamma_{z_0} \end{pmatrix} + P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon$$

ce qui donne presque immédiatement le résultat demandé :-). Cependant l'énoncé demande explicitement le résultat intermédiaire :-).

Q21 :

- On minimise ce bruit si $|\sin \alpha_0|$ est maximal, ce qui correspond à $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, la valeur maximale possible (pas d'inclinaison du pendule).
- Cette condition est en contradiction avec le résultat de la question 9 qui demande un angle minimal pour maximiser l'amplification du signal.
- Par ailleurs, si $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, on ne peut pas identifier les composantes horizontales de l'accélération suivant \vec{x}_0 et \vec{z}_0 . (P n'est plus inversible entre autres conséquences). Cette grandeur n'est pas réaliste.

Q22 :

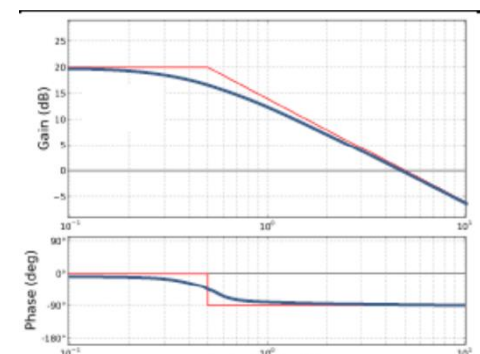
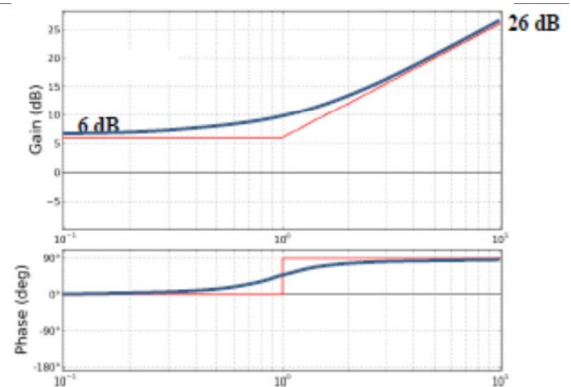
- La structure de pendule inversé est mise en oscillations par les ondes sismiques
- La masselotte mobile permet d'optimiser la position d'équilibre du pendule même sur un sol incliné
- Les bobines et correcteurs associés permettent de filtrer et d'amplifier les signaux captés par le pendule pour isoler les ondes sismiques.
- L'association des 3 VBB à 120° permet de filtrer le bruit pour les ondes horizontales.

Exercice :

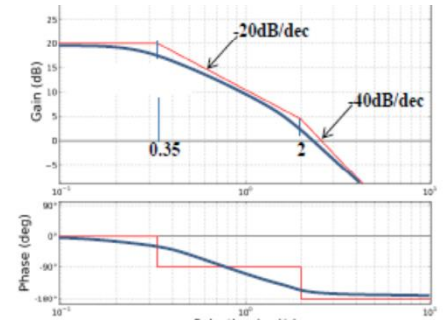
- Intégrateur : $H(p) = \frac{2}{p}$. Mêmes tracés réel et asymptotique et GdB = 0 à $\omega = 2$ rad/s
- Dérivateur pur : $H(p) = 2p$. Mêmes tracés réel et asymptotique et GdB = 0 à $\omega = 0,5$ rad/s

- Dérivateur : $H(p) = 2(p + 1)$. Cassure à 1 rad/s et GdB = 6 = $20 \log 2$ à BF

- 1^{er} ordre : $H(p) = \frac{10}{2p+1}$. Cassure à 0,5 rad/s et GdB = 20 = $20 \log 10$ à BF



- 2^{ième} ordre : $H(p) = \frac{7}{(p+2)(p+0,35)} = \frac{10}{1,42p^2+3,35p+1}$. Cassure à 2 et 0,35 rad/s et GdB = 20 = 20log 10 à BF



- 2^{ième} ordre : $H(p) = \frac{10}{p^2+2p+1}$. Cassure à $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$, $\xi=1$ et GdB = 20 = 20log 10 à BF

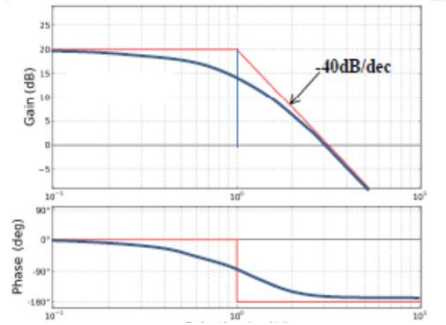


Diagramme de Bode et réponse temporelle

