

## Exercice : Scooter Piaggio

### I. Présentation

La densification des zones urbaines ces vingt dernières années a conduit à une saturation de la plupart des grandes villes européennes. Ainsi, les conditions de circulation devenues très difficiles, les réseaux de transport en commun saturés, ont conduit de nombreux usagers à se tourner vers les véhicules à deux roues. D'abord destiné à un public de passionnés recherchant des sensations et un sentiment de liberté, le marché des deux roues a connu une évolution plus utilitaire. Ceci explique le fort succès des scooters cette dernière décennie. L'enjeu des constructeurs de scooters est donc de proposer des véhicules pouvant se déplacer aisément en milieu urbain et sur route tout en s'adaptant à ces nouveaux usagers peu habitués aux spécificités des deux roues en améliorant le confort et la sécurité.



Figure 1 : Scooter Piaggio MP3



Figure 2 : Piaggio en virage

Dans ce domaine, la société Piaggio propose un scooter dont le train avant est muni de deux roues.

Les objectifs sont d'avoir une tenue de route plus proche d'un véhicule à quatre roues, d'augmenter la capacité de freinage ainsi que le confort d'utilisation en ville tout en conservant la maniabilité d'un deux roues classique. Nous allons nous intéresser dans ce sujet à certains aspects de la conception du train avant à deux roues développé par la société Piaggio sur son scooter MP3.

Le train avant est défini comme l'ensemble comprenant : la roue (ou les roues) avant, la suspension, le dispositif de freinage, tous les éléments participant aux liaisons entre ceux-ci. Sur un scooter à une seule roue avant, le train avant est lié au châssis du véhicule par une liaison pivot permettant d'orienter la roue avant par rapport au véhicule grâce au guidon. Cette liaison permet de diriger le véhicule.

Pour un scooter à deux roues avant, le train avant doit non seulement permettre le pivotement des roues commandé par le guidon mais il doit également permettre l'inclinaison de l'ensemble du scooter tout en conservant le contact des roues au sol (voir photo ci-dessus).

Le train avant étudié est présenté sur la figure ci-contre :

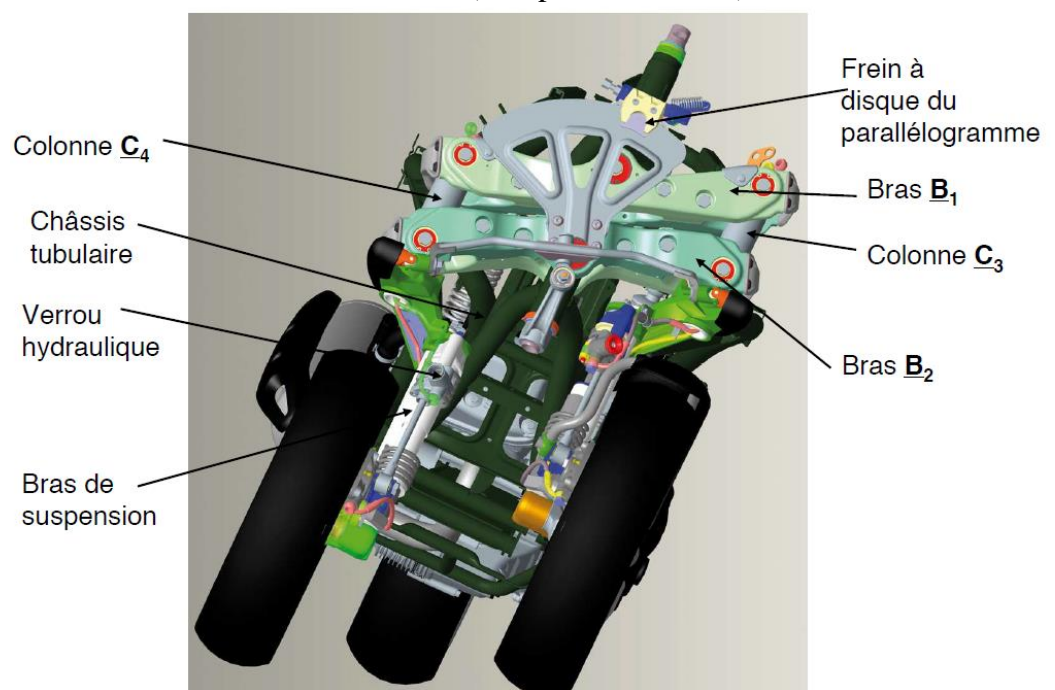


Figure 3 : Vue d'ensemble du train avant

Les colonnes  $C_3$  et  $C_4$  supportent les axes de pivotement de roues avant. Leur mouvement vertical, permettant au scooter de s'incliner, est assuré par les bras  $B_1$  et  $B_2$ . Un frein à disque permet de limiter les mouvements de ces bras afin d'assurer la stabilité du scooter dans les phases de changements de direction.

L'extrait de cahier des charges suivant permet de spécifier les principales performances attendues par ce train avant innovant :

Exigences	Critères	Niveaux
EX1 : Permettre au conducteur de maîtriser son véhicule sur la route	Inclinaison autorisée	$\pm 50^\circ$
	Stabilité du véhicule	Autonome pour $V > 15\text{km/h}$
	Verrouillage de l'inclinaison du train avant	Pour $V < 15\text{km/h}$ temps de verrouillage $< 3\text{s}$
	Masse maximale du train avant	80kg
	Rayon de braquage maxi	2,5m
EX2 : Assurer la liaison au sol	Contact des 2 roues au sol	Permanent
EX3 : Assurer une partie du freinage du scooter	Décélération maximale	$8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
EX4 : Être conforme à la législation en vigueur	Distance entre les deux roues avant pour être conduit par un titulaire du permis B	460mm
	Normes antipollution	Euro 3

## II. Validation du critère de freinage

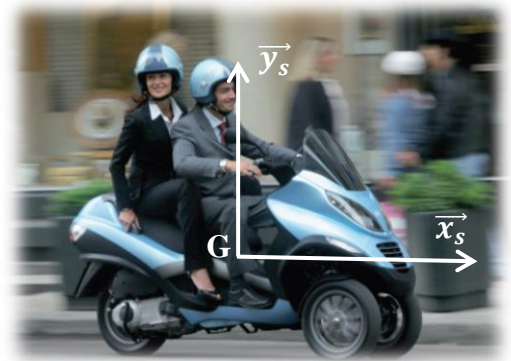
Objectif : L'objectif de cette partie est de vérifier le critère de décélération maximale du scooter.

### II.1. Modélisation, hypothèses et paramétrage

On considère le scooter animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément décéléré de direction  $\vec{x}_s$ , celle de la route.

On se place dans le cas le plus défavorable :

- le scooter est chargé : 2 passagers, des bagages. On appelle  $M$  la masse de l'ensemble  $E = \{\text{scooter} + \text{passager(s)} + \text{bagages}\}$  de centre d'inertie  $G$ .  $M$  vaut 425kg. On considère tous les éléments symétriques par rapport au plan  $(G, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$ , plan de symétrie du scooter.
- le freinage est un freinage d'urgence : le conducteur bloque les freins. On se retrouve alors dans une situation où l'on peut considérer que les roues avant sont à la limite du glissement.
- Dans cette phase, le sol ne transmet aucune action mécanique sur la roue arrière.
- La liaison entre le sol et une roue peut être modélisée par une liaison ponctuelle.



On note  $f$  est le coefficient de frottement entre les pneus et la route. Ce coefficient est supposé constant et identique pour chaque roue. Il vaut  $f = 0,6$ . Le rayon d'une roue est quant à lui noté  $R$  et vaut  $R = 24\text{cm}$ .

Le repère  $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$  associé au sol est considéré galiléen. On considère que l'ensemble des actions mécaniques est contenu dans le plan  $(\vec{x}_s, \vec{y}_s)$ .

### II.2. Détermination des efforts transmis sur le train avant lors d'un freinage d'urgence

Le modèle retenu pour le frottement est celui décrit par les lois de Coulomb.

**Q1.** Justifier que le torseur d'action mécanique représentant l'action du sol sur une roue avant peut se mettre sous la forme d'un glisseur au point de contact entre la roue et le sol de résultante  $X_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}} \vec{x}_s + Y_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}} \vec{y}_s$ .

**Q2.** Appliquer le Théorème de la résultante **dynamique** à l'ensemble  $E = \{\text{scooter} + \text{passager(s)} + \text{bagages}\}$  et en déduire l'expression de  $X_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}}$  permettant de satisfaire le critère de décélération maximale du cahier des charges.

**Q3.** En appliquant la loi de Coulomb au contact entre la roue et le sol, préciser si ce critère de décélération peut être satisfait avec cette valeur de coefficient de frottement.

**Q4.** En déduire alors la norme de l'action mécanique qui s'exerce sur le train avant lors de ce freinage d'urgence. Faire l'application numérique.

### III. Etude et validation partielle du dispositif de verrouillage de l'inclinaison

On s'intéresse dans cette partie à la conception du dispositif de verrouillage de l'inclinaison. Il doit permettre de vérifier le critère de verrouillage de l'exigence EX1 pour les vitesses inférieures à 15km/h. Ce dispositif, présent en option, répond à un souci d'amélioration du confort d'utilisation du scooter en milieu urbain. Le train avant est sensiblement alourdi, par sa structure particulière, par rapport à un véhicule classique. Afin de conserver une bonne maniabilité aux faibles vitesses et de s'adapter aux usagers de tout gabarit, le verrouillage de l'inclinaison est donc proposé en option dans l'exigence EX1. Il permet en outre d'éviter de poser le pied aux arrêts (nombreux en circulation urbaine), et de garer le scooter dans n'importe quelle configuration (pente, à cheval sur un trottoir ou une bordure, etc . . . ) sans avoir à utiliser la béquille centrale (opération difficile sur un engin d'environ 200 kg).

**Objectif :** l'objectif de cette partie est de valider le mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage par rapport au cahier des charges.

La solution retenue pour bloquer la mobilité du train avant est un verrou hydraulique pour chaque bras de suspension. Les schémas correspondant à la suspension avant en configuration libre et verrouillée sont donnés sur la figure suivante.

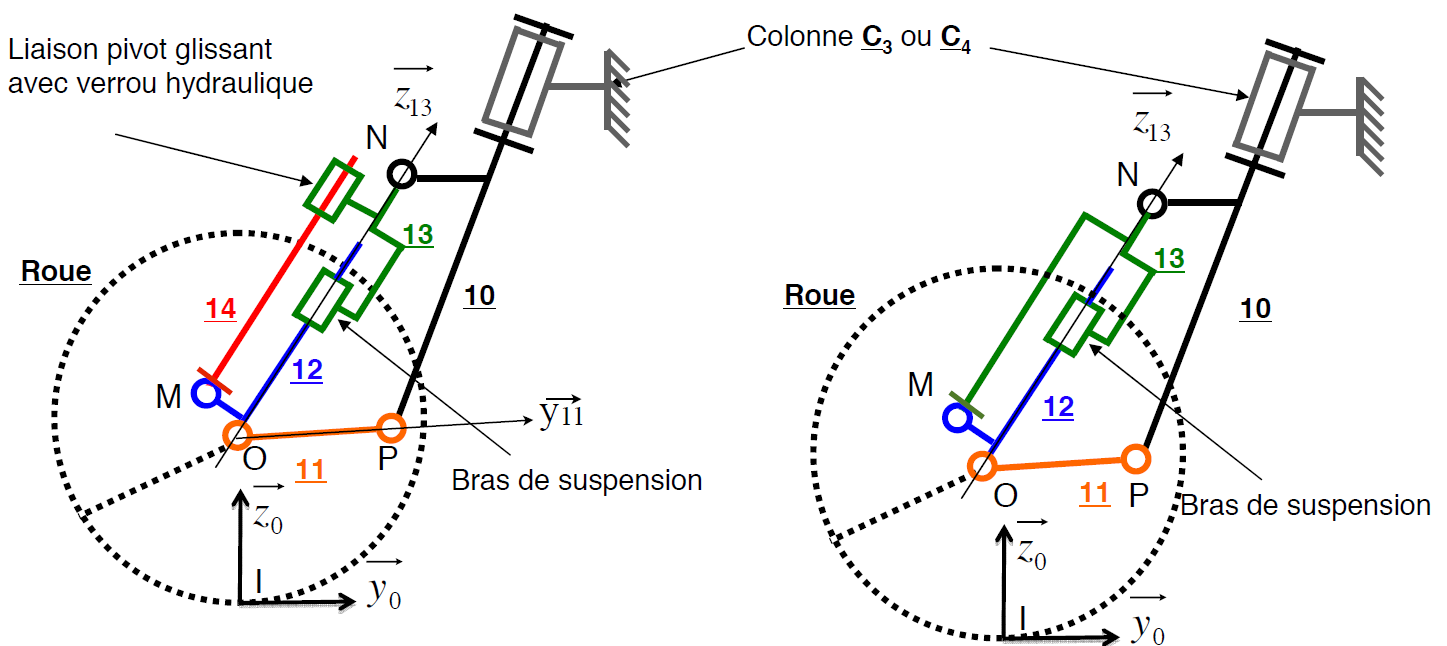


Figure 4 : Configuration libre (à gauche) et verrouillée (à droite)

#### III.1. Détermination de l'action mécanique nécessaire au verrouillage de la mobilité de la suspension avant.

La figure 4 présente le train avant du scooter dans les deux cas de fonctionnement. Celui-ci est composé des éléments et des liaisons suivants :

- La roue est en liaison pivot d'axe  $(O; \vec{x}_0)$  avec le bras oscillant 11
- Le bras oscillant 11 est en liaison pivot d'axe  $(O; \vec{x}_0)$  avec le bras de suspension constitué des pièces 12 et 13.
- La demi-fourche 10 est en liaison pivot d'axe  $(P; \vec{x}_0)$  avec le bras oscillant 11
- Une tige 14 est liée par une liaison ponctuelle de normale  $(M; \vec{z}_{13})$  avec 12 et par une liaison pivot glissant d'axe  $(M; \vec{z}_{13})$  avec 13. C'est cette dernière liaison pivot glissant qui sera verrouillée par le verrou hydraulique.
- La liaison équivalente entre 12 et 13 est assimilée à une glissière de direction  $\vec{z}_{13}$
- Entre 12 et 13 sont placés un amortisseur et un ressort non représentés.
- La masse des différents éléments est négligée.

On pose :  $\vec{OM} = -m_y \vec{y}_{13} + m_z \vec{z}_{13}$      $\vec{ON} = n \vec{z}_{13}$      $\vec{OP} = l_{11} \vec{y}_{11}$   
 $\theta_{13} = (\vec{y}_0, \vec{y}_{13}) = (\vec{z}_0, \vec{z}_{13})$      $\theta_{11} = (\vec{y}_0, \vec{y}_{11}) = (\vec{z}_0, \vec{z}_{11})$

On utilisera les hypothèses suivantes pour l'ensemble du problème :

- le référentiel lié au sol et noté  $R_0$  est supposé galiléen
- l'ensemble de la suspension et du scooter est en équilibre dans le référentiel  $R_0$
- l'action exercée par la roue sur 11 en O est modélisée par un glisseur de résultante :  $\vec{R}_{r \rightarrow 11} = Y_{r \rightarrow 11} \vec{y}_0 + Z_{r \rightarrow 11} \vec{z}_0$  (le moment en O de l'action de la roue sur 11 est donc nul)
- on suppose que la pivot glissant entre 13 et 14 est une liaison avec frottement. Elle transmet donc en plus des actions inhérentes à cette liaison une résultante portée par l'axe  $\vec{z}_{13}$  notée :  $Z_{13 \rightarrow 14} \vec{z}_{13}$
- le ressort placé entre 12 et 13 exerce une action mécanique sur 12 modélisée par une résultante au point O portée par  $\vec{z}_{13}$  notée :  $\vec{R}_{ress \rightarrow 12} = -F_{ress \rightarrow 12} \vec{z}_{13}$ . On suppose que l'amortisseur ne transmet aucune action mécanique dans cette phase de fonctionnement.
- le problème est considéré plan, et on se place dans le plan  $(\vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Le torseur représentant l'action mécanique de i sur j en un point M sera donc noté :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} - & L_{ij} \\ Y_{ij} & - \\ Z_{ij} & - \end{Bmatrix}_{(M, \mathcal{B}_0)}$$

Le graphe partiel des liaisons sur lequel ont été ajoutées les actions mécaniques est représenté ci-contre

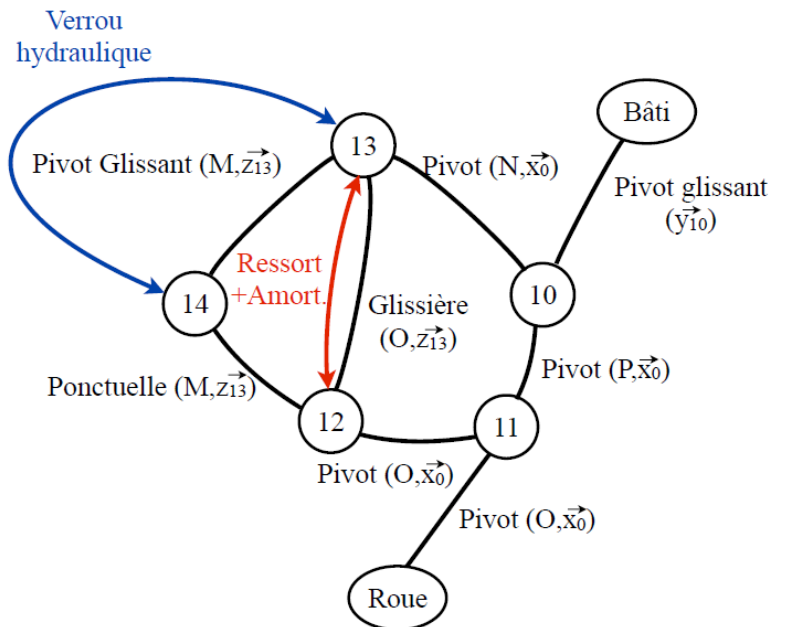


Figure 5 : graphe partiel des liaisons avec les actions mécaniques

- Q5.** Isoler le solide 11 et montrer à l'aide du principe fondamental de la statique que l'action mécanique de 10 sur 11 est portée par l'axe  $\vec{y}_{11}$ .
- Q6.** Isoler l'ensemble 12, 13 et 14 et montrer, en appliquant le théorème du moment statique au point N, centre de la liaison entre 10 et 13 que l'action mécanique de 11 sur 12 est une résultante portée par l'axe  $\vec{z}_{13}$ .
- Q7.** En déduire, à l'aide des résultats précédents, le torseur représentant l'action mécanique du solide 11 sur le solide 12 au point O. Ce torseur fera sera exprimé en fonction de :  $Y_{r \rightarrow 11}$ ,  $Z_{r \rightarrow 11}$ ,  $\theta_{11}$  et  $\theta_{13}$ .
- Q8.** Déterminer alors le torseur de l'action mécanique de 14 sur 12 au point M. Détailler la méthode utilisée.
- Q9.** En déduire alors l'expression de  $Z_{13 \rightarrow 14}$  en fonction de :  $Y_{r \rightarrow 11}$ ,  $Z_{r \rightarrow 11}$ ,  $\theta_{11}$  et  $\theta_{13}$  et  $F_{ress \rightarrow 12}$ .

### III.2. Détermination de la pression hydraulique sur le verrou nécessaire au verrouillage de la mobilité de la suspension avant.

**Objectif :** L'objectif de cette partie est de déterminer la pression à imposer dans le dispositif de verrouillage permettant de maintenir la suspension bloquée

Le principe retenu pour verrouiller la liaison pivot glissant entre 13 et 14 consiste à pincer un cylindre élastique Cy sur la tige 14 (voir figure 6). Le blocage se fait alors par adhérence. Le contact entre Cy et 14 sera considéré comme ponctuel aux points  $J'_1$  et  $J'_2$ .

Pour simplifier, on considère que les coefficients de frottement et d'adhérence entre Cy et 14 sont égaux et valent :  $f = 0,3$ . La résultante globale des efforts à transmettre par adhérence de 14 sur Cy est :  $\vec{R}_{14 \rightarrow Cy} = Z_{14 \rightarrow Cy} \vec{z}_{13}$  avec  $Z_{14 \rightarrow Cy} = 923 \text{ N}$

Compte tenu de la grande souplesse de Cy, on considère que les efforts transmis en  $J_1$  et  $J_2$  sont identiques en norme aux efforts en  $J'_1$  et  $J'_2$  respectivement.

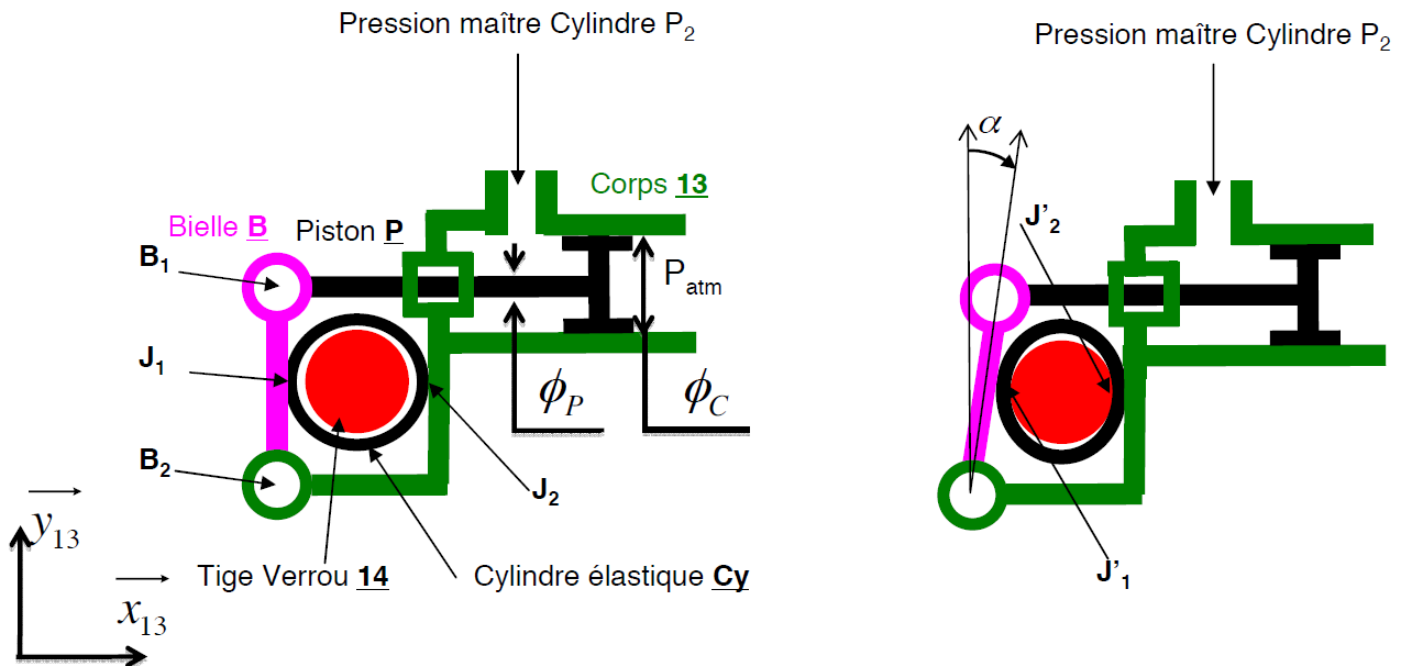


Figure 6 : Verrou hydraulique non verrouillé (à gauche) et verrouillé (à droite)

On pose :  $\vec{B_2 B_1} = l_b \vec{y}_{13}$        $\vec{B_2 J_1} = \frac{l_b}{2} \vec{y}_{13}$        $\vec{J_1 J_2} = d_T \vec{x}_{13}$        $\alpha \approx 0 \text{ rad}$   
 $l_b = 30 \text{ mm}$        $d_T = 50 \text{ mm}$       diamètres :  $\phi_C = 30 \text{ mm}$  et  $\phi_P = 15 \text{ mm}$

L'angle  $\alpha$  étant supposé petit, on travaillera sur la configuration non déformée.

**Q10.** En détaillant le(s) théorème(s) et isolement(s) utilisés, exprimer les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ponctuelles avec frottement en  $J'_1$  et  $J'_2$  notés  $\{T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_1}\}$  et  $\{T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_2}\}$  à la limite du glissement entre 14 et Cy. On exprimera ces torseurs dans la base  $(\vec{x}_{13} = \vec{x}_0, \vec{y}_{13}, \vec{z}_{13})$  respectivement en  $J'_1$  et  $J'_2$  en fonction de  $Z_{14 \rightarrow Cy}$  et de  $f$ .

**Q11.** En détaillant le(s) théorème(s) et isolement(s) utilisés, en déduire la projection sur  $\vec{x}_{13}$  de la résultante des actions mécaniques transmissibles de P sur B notée  $\vec{R}_{P \rightarrow B}$  en fonction de  $Z_{14 \rightarrow Cy}$  et de  $f$ . En déduire la pression  $P_2$  à imposer dans le dispositif de verrouillage en fonction de  $Z_{14 \rightarrow Cy}$ ,  $f$ ,  $P_{atm}$  et des caractéristiques géométriques. Effectuer l'application numérique de  $P_2$  exprimée en bar.

### III.3. Détermination du couple moteur nécessaire au verrouillage des mobilités du train avant.

Le mécanisme de verrouillage par verrou hydraulique décrit dans la partie précédente est complété avec un dispositif de freinage par frein à disque. Ces deux mécanismes (verrou hydraulique et frein à disque) sont actionnés par un moteur électrique commun. Le mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage est schématisé figure 6

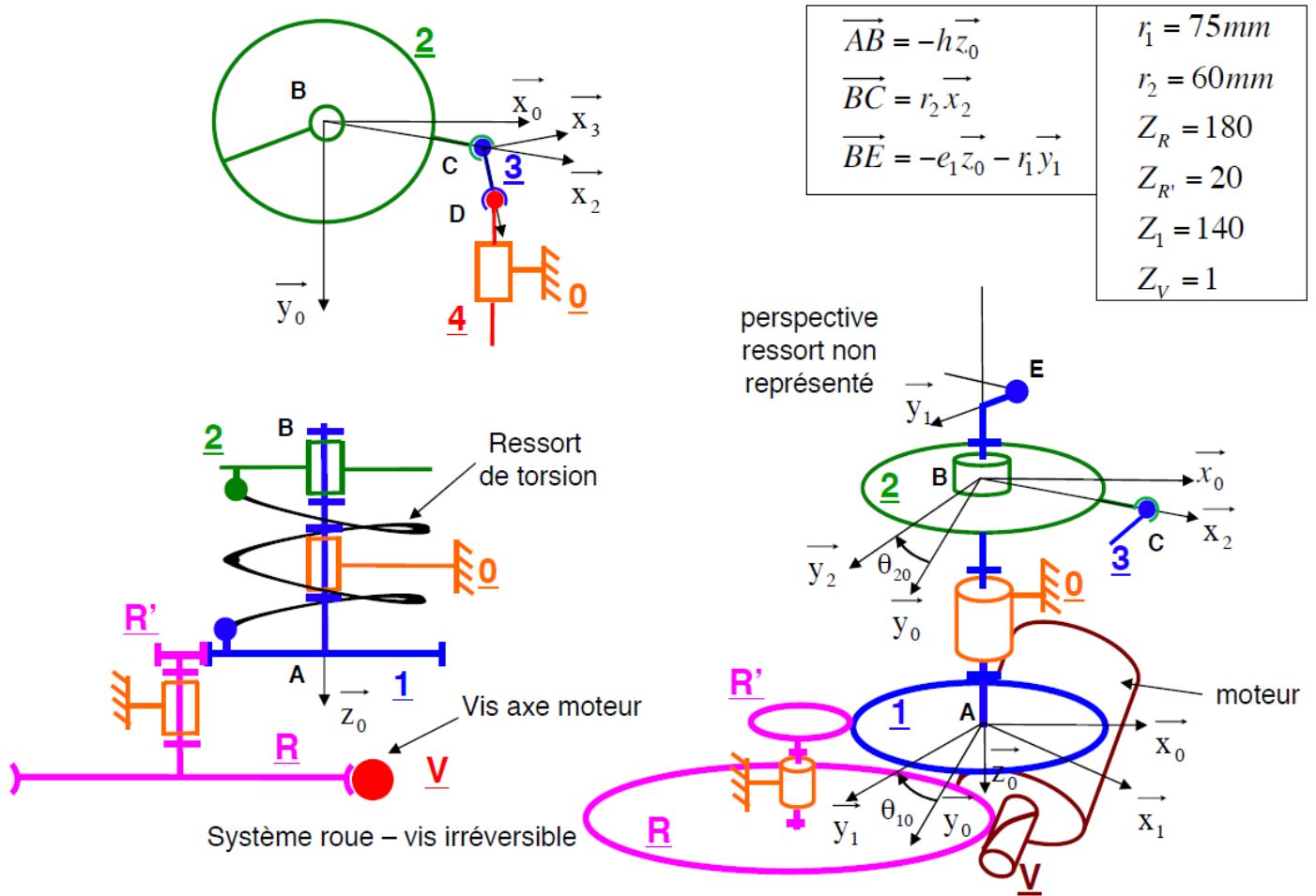


Figure 7 : Mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage

Il est principalement constitué d'un ensemble 1 en liaison pivot par rapport au bâti 0. L'axe du moteur électrique est solidaire de la vis V qui engrène sur la roue R solidaire de la roue R' qui entraîne l'ensemble 1. L'extrémité du câble actionnant le frein à disque du parallélogramme est fixée à l'ensemble 1 au point E. La rotation de 1 permet donc de mettre en tension le câble du frein à disque du parallélogramme. La pièce 2 est en liaison pivot avec l'ensemble 1. Un ressort de torsion placé entre 1 et 2 permet d'imposer un couple noté  $\vec{C}_{res \rightarrow 2} = C_{res \rightarrow 2} \vec{z}_0$  sur 2. La pièce 2 est en liaison sphérique au point C avec la bielle 3. La bielle 3 est en liaison sphérique au point D avec le piston 4 du maître-cylindre dont le schéma de principe est présenté figure 8. Le maître-cylindre permet d'actionner les verrous hydrauliques des deux bras de suspension avant.

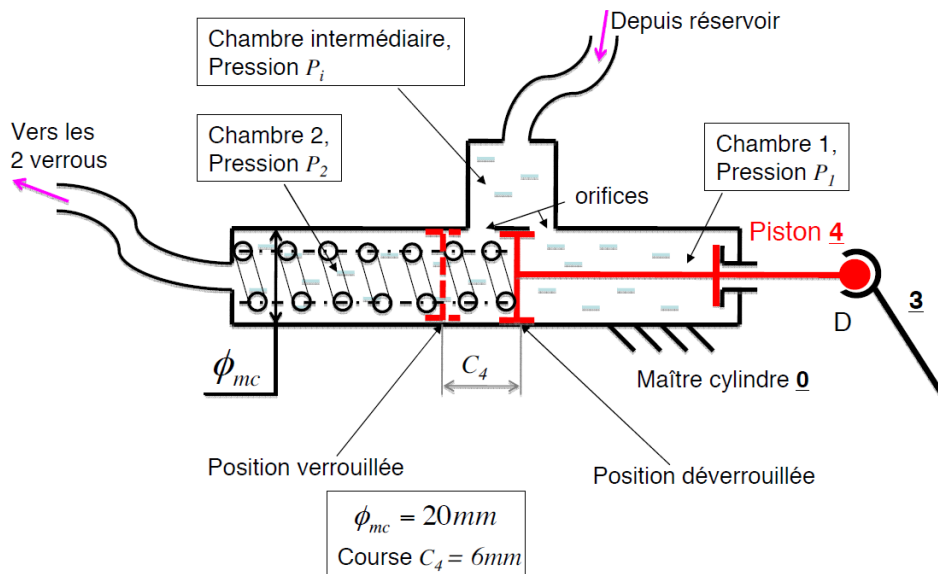


Figure 8 : Maître-cylindre du dispositif de verrouillage

On suppose qu'en position verrouillée, on a :

$$\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = -30^\circ \quad \theta_{20} = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = 0^\circ$$

Les actions du ressort du maître-cylindre ainsi que les actions dues à la pression arrière  $P_1$  seront négligées.

**Q12.** Déterminer le couple  $C_{res \rightarrow 2}$  à imposer par le ressort de torsion sur 2 pour verrouiller les deux bras de suspension en fonction de  $P_2$  et des données géométriques. Justifier votre réponse en détaillant les théorème(s) et isolement(s) utilisés.

Lors du verrouillage des verrous hydrauliques, la course  $C_4$  du piston 4 du maître-cylindre est de 6 mm. On considère que cela entraîne un débattement angulaire maximum de la pièce 2 valant  $\Delta\theta_{20 \max} = 6^\circ$ .

La figure 9 ci-dessous montre un relevé expérimental de l'effort de tension dans le câble noté  $F$  en fonction de l'angle  $\theta_{10}$  lorsque l'on actionne le frein à disque.  $F$  est mesuré au point E de la figure 6. La résultante des actions du câble en E est :  $\vec{F}_{cab \rightarrow 1} = -F \vec{x}_1$ . Pour assurer le blocage du parallélogramme d'inclinaison, la tension dans le câble doit être égale à 200 N.

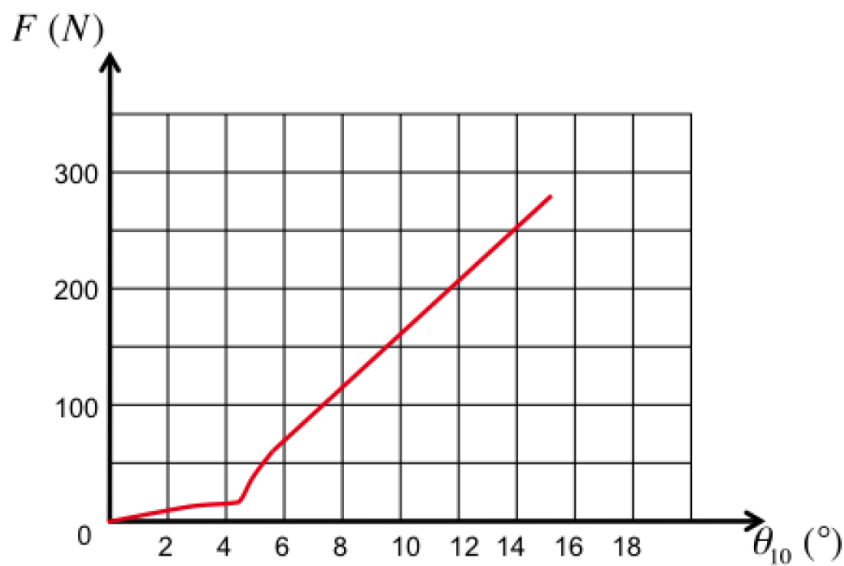


Figure 9 : tension  $F$  en fonction de l'angle  $\theta_{10}$

**Q13.** Relever la valeur  $\theta_{10 \max}$  à imposer à la pièce 1 pour obtenir l'effort de tension de verrouillage. Déduire alors des questions précédentes l'expression de la raideur du ressort de torsion notée  $K_{Res}$  (en Nm/deg) qui permettra d'imposer la pression  $P_2$ . Faire l'application numérique.

Corrigé

**Q1.** Le contact entre la roue et le sol se modélise par une liaison ponctuelle de normale  $\vec{y}_s$ . De plus, on suppose la présence de frottements dans cette liaison, ce qui justifie la présence d'une résultante contenue dans le plan tangent. Le problème étant considéré dans le plan  $(\vec{x}_s, \vec{y}_s)$ , cette résultante dans le plan tangent est donc supportée par le vecteur  $\vec{x}_s$ . Donc au point de contact entre la roue et le sol I :

$$\{\mathcal{T}_{sol \rightarrow roue}\} = \begin{Bmatrix} X_{sol \rightarrow roue} & - \\ Y_{sol \rightarrow roue} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{I, \mathcal{B}}$$

**Q2.** On isole l'ensemble  $E = \{\text{scooter} + \text{passagers} + \text{bagages}\}$  et on fait un BAME :

- $\{\mathcal{T}_{sol \rightarrow roue \text{ droite}}\}$
- $\{\mathcal{T}_{sol \rightarrow roue \text{ gauche}}\}$
- $\{\mathcal{T}_{poids}\}$
- le sol ne transmet aucune action sur la roue arrière.

La résultante dynamique s'écrit (en notant  $x$  la position du scooter :

$$\vec{M} \vec{a}_{(G \in E/R_0)} = M \ddot{x} \vec{x}_s$$

Le théorème de la résultante dynamique associé à l'ensemble E dans le référentiel  $\widehat{\mathcal{R}}_s$  lié au sol supposé galiléen :

$$M \ddot{x} \vec{x}_s = M g \vec{y}_s + Y_{sol \rightarrow roue} \vec{y}_s + X_{sol \rightarrow roue} \vec{x}_s$$

Soit selon l'axe  $\vec{x}_s$  :  $M \ddot{x} = X_{sol \rightarrow roue}$

**Application numérique :**  $\ddot{x} = -8 \text{ m/s}^2$ ,  $M = 425 \text{ kg}$  donc  $X_{sol \rightarrow roue} = -3400 \text{ N}$

**Q3.** En appliquant la loi de Coulomb, sachant que les roues avant sont à la limite du glissement, alors :  $|X_{sol \rightarrow roue}| = f |Y_{sol \rightarrow roue}|$ .

**Application numérique :**  $Y_{sol \rightarrow roue} = Mg = 4250 \text{ N}$  donc  $|X_{sol \rightarrow roue}| = 2550 \text{ N}$ . Ce critère de décélération ne peut pas être satisfait avec cette valeur de coefficient de frottement. Cela veut dire que le cahier des charges constructeur a pris une marge de sécurité pour la conception du train avant du scooter.

**Q4.** L'action mécanique qui s'exerce sur le train avant a donc pour norme :

$$\|\vec{R}_{sol \rightarrow roues}\} = \sqrt{X_{sol \rightarrow roue}^2 + Y_{sol \rightarrow roue}^2} = 4950 \text{ N}$$

**Q5.** On isole le solide 11 et on fait le BAME :

$$\{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 11}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{10/11} & - \\ Z_{10/11} & - \end{Bmatrix}_{P, \mathcal{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{12 \rightarrow 11}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{12/11} & - \\ Z_{12/11} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{roue \rightarrow 11}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{roue/11} & - \\ Z_{roue/11} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_0}$$

On veut montrer que l'action mécanique de 10 sur 11 est portée par l'axe  $\vec{y}_{11}$ . On applique le théorème du moment statique au point O en projection sur  $\vec{x}_0$  à la pièce 11 supposée en équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen :

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{M}_{O,10/11} \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}_{O,12/11} \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}_{O,roue/11} \cdot \vec{x}_0 \\ \Leftrightarrow 0 &= \vec{OP} \wedge (Y_{10/11} \vec{y}_0 + Z_{10/11} \vec{z}_0) + 0 + 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= [l_{11} \vec{y}_{11} \wedge \vec{R}_{10/11}] \cdot \vec{x}_0 \\ \Rightarrow \vec{0} &= \vec{y}_{11} \wedge \vec{R}_{10/11} \end{aligned}$$

Donc les vecteurs  $\vec{y}_{11}$  et  $\vec{R}_{10/11}$  sont colinéaires. On en déduit alors que  $\vec{R}_{10/11}$  est porté par  $\vec{y}_{11}$ .

**Q6.** On isole l'ensemble  $\mathbf{S} = \{\mathbf{12} + \mathbf{13} + \mathbf{14}\}$  et on fait le BAME :

$$\{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 12}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{11/12} & - \\ Z_{11/12} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 13}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{10/13} & - \\ Z_{10/13} & - \end{Bmatrix}_{N, \mathcal{B}_0}$$

On veut montrer que l'action mécanique de  $\mathbf{11}$  sur  $\mathbf{12}$  est portée par l'axe  $\vec{z}_{13}$ . On applique le théorème du moment statique au point N en projection sur  $\vec{x}_0$  à l'ensemble  $\mathbf{S}$  supposé en équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen :

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{M}_{N, 11/12} \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}_{N, 10/13} \cdot \vec{x}_0 \\ \Leftrightarrow 0 &= \vec{N}\vec{O} \wedge (Y_{11/12} \cdot \vec{y}_0 + Z_{11/12} \cdot \vec{z}_0) + 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= [-nz_{13} \wedge \vec{R}_{11/12}] \cdot \vec{x}_0 \\ \Rightarrow \vec{O} &= \vec{z}_{13} \wedge \vec{R}_{11/12} \end{aligned}$$

Donc les vecteurs  $\vec{z}_{13}$  et  $\vec{R}_{11/12}$  sont colinéaires. On en déduit alors que  $\vec{R}_{11/12}$  est porté par  $\vec{z}_{13}$ .

**Q7.** En se servant de la **Q6** on montre facilement que  $\vec{R}_{12 \rightarrow 11}$  est porté par  $\vec{z}_{13}$ . De même d'après la **Q5**  $\vec{R}_{10 \rightarrow 11}$  est porté par  $\vec{y}_{11}$ . On isole alors le solide  $\mathbf{11}$  et on applique le théorème de la résultante statique à  $\mathbf{11}$  en équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen :

$$\begin{aligned} \vec{O} &= \vec{R}_{roue \rightarrow 11} + \vec{R}_{12 \rightarrow 11} + \vec{R}_{10 \rightarrow 11} \\ \Leftrightarrow \vec{O} &= Y_{r \rightarrow 11} \vec{y}_0 + Z_{r \rightarrow 11} \vec{z}_0 + R_{12 \rightarrow 11} \vec{z}_{13} + R_{10 \rightarrow 11} \vec{y}_{11} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{selon } \vec{y}_0 : 0 = Y_{r \rightarrow 11} - R_{12 \rightarrow 11} \sin \theta_{13} + R_{10 \rightarrow 11} \cos \theta_{11} \\ \text{selon } \vec{z}_0 : 0 = Z_{r \rightarrow 11} + R_{12 \rightarrow 11} \cos \theta_{13} + R_{10 \rightarrow 11} \sin \theta_{11} \end{cases} \end{aligned}$$

On combine les deux équations pour éliminer la résultante  $R_{10 \rightarrow 11}$  et l'on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} 0 &= Z_{r \rightarrow 11} \cos \theta_{11} - Y_{r \rightarrow 11} \sin \theta_{11} + R_{12 \rightarrow 11} [\cos \theta_{13} \cos \theta_{11} + \sin \theta_{13} \sin \theta_{11}] \\ \Leftrightarrow R_{12 \rightarrow 11} &= \frac{1}{\cos(\theta_{13} - \theta_{11})} [Y_{r \rightarrow 11} \sin \theta_{11} - Z_{r \rightarrow 11} \cos \theta_{11}] \end{aligned}$$

Au point O, on a donc :

$$\{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 12}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ R_{11 \rightarrow 12} \cos \theta_{13} & - \\ -R_{11 \rightarrow 12} \sin \theta_{13} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_0} \quad \text{avec } R_{11 \rightarrow 12} = \frac{Z_{r \rightarrow 11} \cos \theta_{11} - Y_{r \rightarrow 11} \sin \theta_{11}}{\cos(\theta_{13} - \theta_{11})}$$

**Q8.** On isole la pièce  $\mathbf{12}$  et on fait le BAME :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 12}\} &= \begin{Bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \\ R_{11/12} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_{13}} & \{\mathcal{T}_{13 \rightarrow 12}\} &= \begin{Bmatrix} - & L_{13/12} \\ Y_{13/12} & - \\ 0 & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_{13}} \\ \{\mathcal{T}_{14 \rightarrow 12}\} &= \begin{Bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \\ Z_{14/12} & - \end{Bmatrix}_{M, \mathcal{B}_{13}} & \{\mathcal{T}_{ress \rightarrow 12}\} &= \begin{Bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \\ -F_{ress/12} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_{13}} \end{aligned}$$

On applique le théorème de la résultante statique à la pièce  $\mathbf{12}$  en équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  supposé galiléen en projection sur  $z_{13}$  :

$$\begin{aligned} 0 &= R_{11/12} + 0 + Z_{14/12} - F_{ress/12} \\ \Rightarrow Z_{14/12} &= F_{ress/12} - R_{11/12} \end{aligned}$$

**Q9.** On applique alors le théorème de la résultante statique à la pièce  $\mathbf{14}$  en équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  galiléen en projection sur l'axe  $\vec{z}_{13}$  :

$$\begin{aligned} 0 &= Z_{12/14} + Z_{13/14} \Rightarrow Z_{14/13} = R_{11/12} - F_{ress/12} \\ \Rightarrow Z_{14/13} &= \frac{Z_{r \rightarrow 11} \cos \theta_{11} - Y_{r \rightarrow 11} \sin \theta_{11}}{\cos(\theta_{13} - \theta_{11})} - F_{ress/12} \end{aligned}$$

**Q10.** On isole **14** en équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  galiléen et on applique le théorème de la résultante statique selon l'axe  $\vec{y}_{13}$  :  $0 = 0 + Y_{13/14}$  donc on a  $Y_{13/14} = 0$ .

Les liaisons en  $J'_1$  et  $J'_2$  sont des liaisons ponctuelles avec frottement, de normale  $\vec{x}_{13}$ . On se considère à la limite du glissement, et on a  $Y_{13/14} = 0$ . Comme on possède deux contacts  $J'_1$  et  $J'_2$ , l'action à transmettre sur 1 seul contact est :  $\frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2}$ . L'action tangentielle due aux frottements est donc portée selon l'axe  $\vec{z}_{13}$  du plan tangent. On en déduit donc pour le contact en  $J'_1$  par exemple :

$$f|X_{14 \rightarrow Cy}| = \left| \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2} \right|$$

Ainsi, on obtient les torseurs suivants :

$$\{\mathcal{T}_{Cy \rightarrow 14}^{J'_1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2f} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2} & 0 \end{array} \right\}_{J'_1, B_{13}} \quad \{\mathcal{T}_{Cy \rightarrow 14}^{J'_2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2f} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2} & 0 \end{array} \right\}_{J'_2, B_{13}}$$

**Q11.** On isole **B** en équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  galiléen et on applique le théorème du moment statique en  $B_2$ , projeté sur  $\vec{z}_{13}$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{B_2, Cy \rightarrow B} \cdot \vec{z}_{13} + \underbrace{\vec{M}_{B_2, 13 \rightarrow B} \cdot \vec{z}_{13}}_{=0} + \vec{M}_{B_2, P \rightarrow B} \cdot \vec{z}_{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( \vec{B}_2 J_1 \wedge \vec{R}_{Cy \rightarrow B} \right) \cdot \vec{z}_{13} + \left( \vec{B}_2 B_1 \wedge \vec{R}_{P \rightarrow B} \right) \cdot \vec{z}_{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{l_b}{2} \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2f} - l_b \vec{R}_{P \rightarrow B} \cdot \vec{x}_{13} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{R}_{P \rightarrow B} \cdot \vec{x}_{13} &= \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{4f} \end{aligned}$$

On isole **P** en équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  galiléen et on applique le théorème de la résultante statique selon  $\vec{x}_{13}$

$$\begin{aligned} R_{P_2 \rightarrow P} + R_{P_{atm} \rightarrow P} + R_{B \rightarrow P} \cdot \vec{x}_{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow P_2 \cdot \pi(\phi_c^2 - \phi_p^2) - P_{atm} \pi \phi_c^2 - \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{4f} &= 0 \\ \Leftrightarrow P_2 &= P_{atm} \frac{\phi_c^2}{\phi_c^2 - \phi_p^2} + \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{4f \pi(\phi_c^2 - \phi_p^2)} \end{aligned}$$

**Application numérique :**  $P_2 \simeq 60 \text{ bar}$

**Q12.** On isole la pièce **4** en équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  galiléen et on applique le théorème de la résultante statique projeté sur l'axe  $\vec{y}_0$  :

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{R}_{0 \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0}_{=0} + \vec{R}_{3 \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0 + \vec{R}_{pres \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow Y_{34} \cos \theta_{30} + \vec{R}_{pres \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0 &= 0 \end{aligned}$$

On isole la pièce **2** en équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  galiléen et on applique le théorème du moment statique en B projeté sur l'axe  $\vec{z}_0$  :

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{M}_{B, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0}_{=0} + \underbrace{\vec{M}_{B, ress \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0}_{C_{ress \rightarrow 2}} + \vec{M}_{B, 3 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow C_{ress \rightarrow 2} + r_2 Y_{32} \vec{y}_2 \cdot \vec{y}_3 &= 0 \end{aligned}$$

On isole alors **3** en équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  galiléen et on applique le théorème de la résultante statique selon  $\vec{y}_3$  :

$$\vec{R}_{2 \rightarrow 3} = Y_{23} \vec{y}_3 = -Y_{43} \vec{y}_3$$

On en déduit alors :

$$C_{ress \rightarrow 2} = r_2 \frac{\cos \theta_{32}}{\cos \theta_{30}} P_2 \pi \frac{\phi_{mc}^2}{4}$$

Application numérique :  $C_{ress \rightarrow 2} = 126 Nm$ .

**Q13.** On a  $F$  légèrement supérieur à 200N pour  $\theta_{10} = 12^\circ$ , donc  $\theta_{10,Max} = 12^\circ$ . Ainsi :

$$K_{res} = \frac{C_{ress \rightarrow 2}}{\theta_{10,Max} - \Delta\theta_{20,Max}}$$

Application numérique :  $K_{res} = 21 Nm/deg$

## Exercice : Quille pendulaire

### 1 Mise en situation

#### 1.1 Contexte

La conception des voiliers de course, dans un contexte de forte compétitivité sportive et technique, utilise toutes les évolutions récentes afin d'améliorer performances et sécurité. Dès les premiers stades de la conception du navire, l'architecte naval intègre les exigences des différents spécialistes qui collaborent au projet. À ce titre, la conception d'un voilier de course océanique est analogue à la conduite d'un projet industriel classique où les intervenants s'inscrivent dans une démarche collaborative pilotée par un coordonnateur de projet.

#### 1.2 Fonction de la quille dans la dynamique des voiliers

Le comportement dynamique d'un voilier est conditionné par ses interactions avec les deux fluides avec lesquels il entre en contact : l'air et l'eau. Il reçoit de l'énergie sous la forme des actions aérodynamiques dues au mouvement relatif air/voiles. Ces actions mécaniques le font avancer et provoquent son inclinaison autour de son axe longitudinal (axe de direction  $\vec{z}_N$  sur la figure 1). C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contre-poids. Cette quille est généralement constituée d'un voile immergé dans l'eau à l'extrémité duquel se trouve un lest profilé. L'efficacité de la quille dépend de la masse du lest et de la longueur du voile.

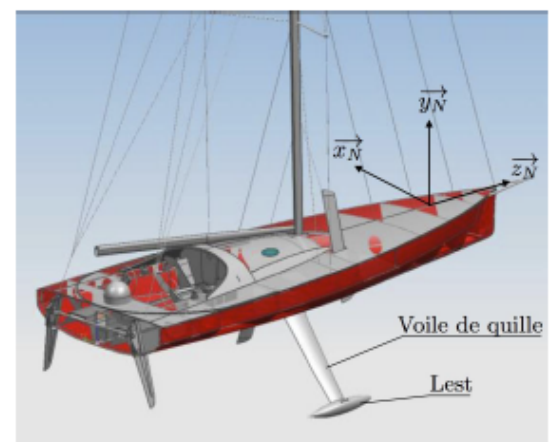


FIGURE 1 – Voilier 60' IMOCA

Ces deux paramètres présentent des limitations : le lest ne peut être trop important sous peine de solliciter dangereusement le voile de quille et la longueur de quille est limitée par le tirant d'eau maximal admissible (il faut permettre l'entrée dans les ports sans toucher le fond!).

## 2 Mise en évidence de l'intérêt d'une pendulation

### 2.1 Étude de la stabilité « de formes » d'un voilier doté d'une quille non pendulaire (voir figure 2)

On considère le navire à l'arrêt et en équilibre sur un plan d'eau au repos (figure 2, à gauche). Il est soumis :

- aux effets de pesanteur, représentés par le torseur  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow nav}\} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$  où  $G$  désigne le centre de gravité du navire,  $M$  sa masse,  $g$  l'accélération de pesanteur et  $\vec{y}$  oriente la verticale ascendante du lieu ;
- aux actions de l'eau sur la coque ou « Poussée d'Archimède » représentées par le torseur

$$\{\mathcal{T}_{eau \rightarrow nav}\} = \left\{ \begin{array}{c} R_D\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

où  $C$  désigne le centre de carène et  $R_D$ , exprimée en Newton, l'intensité de la résultante des actions de l'eau sur la coque, que l'on nomme « déplacement » en construction navale. À l'équilibre :  $R_D = Mg$ .

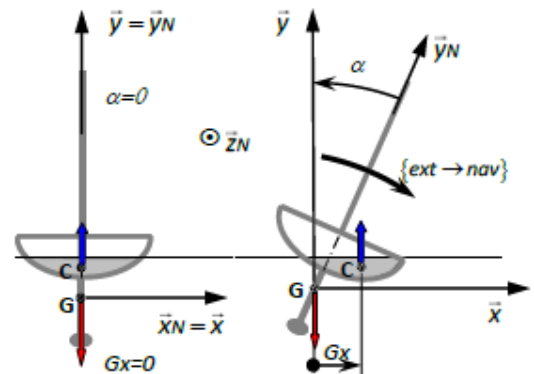


FIGURE 2 – Coque en équilibre (à gauche) et sous gîte (à droite)

Une cause extérieure représentée par le torseur  $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow nav}\}$ , comme l'effet du vent sur les voiles ou des vagues sur la coque, provoque la gîte du navire caractérisée par l'angle de gîte  $\alpha$  (figure 2, à droite). Un nouvel équilibre est alors obtenu sous l'effet des deux actions mécaniques précédentes, le poids et la poussée d'Archimède, ainsi que l'action mécanique extérieure cause de gîte. L'équation de moment en  $G$  selon  $\vec{z}$  se traduit par :  $\vec{M}_{G,ext \rightarrow nav} \cdot \vec{z} + R_D \cdot G_x = 0$  où  $G_x$  désigne la longueur mesurée algébriquement selon  $\vec{x}$  entre le centre de gravité et le centre de carène. La quantité  $R_D \cdot G_x$  est appelée :

- *moment de redressement* si  $R_D \cdot G_x > 0$  et  $\alpha > 0$  ou  $R_D \cdot G_x < 0$  et  $\alpha < 0$  ;
- *moment de chavirage* si  $R_D \cdot G_x < 0$  et  $\alpha > 0$  ou  $R_D \cdot G_x > 0$  et  $\alpha < 0$ .



FIGURE 3 – Modèle numérique d'une coque de 60' IMOCA

Dans son avant-projet, l'architecte naval étudie cette stabilité du navire à l'aide d'outils de simulation numérique. À partir du modèle numérique des formes de la coque (exemple figure 3) et d'une répartition des masses aussi proche que possible de la répartition finale, les différentes positions d'équilibre du navire sont recherchées en fonction de l'angle de gîte. Cette étude fournit une courbe de stabilité théorique où apparaît en abscisse l'angle de gîte  $\alpha$  et en ordonnée le paramètre  $G_x$  (voir courbe de la figure R1 sur le document réponses ou la figure 4).

**Q1.** La figure R1 du document réponses donne la courbe de stabilité théorique d'un voilier à quille non pendulaire (quille fixe par rapport à la coque).

- a - Expliquer pourquoi  $G_x$  suffit à caractériser le moment de redressement ou de chavirage.
- b - Pour chacune des six positions (numérotées de 1 à 6) de la figure R2 du document réponses, associer le point d'équilibre A, B, C, D, E ou F repéré sur la courbe de la figure R1. Par exemple, le point A correspond à la position 4 ; on a donc inscrit la lettre A dans la case 4.

La figure 4 représente l'évolution, pour un navire 60' IMOCA à quille fixe, de  $G_x$  en fonction de l'angle de gîte  $\alpha$ , pour  $\alpha$  variant de 0 à 180°. Sur cette courbe, les quantités  $S_{01} = \int_0^{\alpha_1} G_x(\alpha) d\alpha$  et  $S_{12} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} G_x(\alpha) d\alpha$  sont représentées par les « aires » comprises entre la courbe et l'axe des abscisses. On montre que  $S_{ij} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} G_x(\alpha) d\alpha$ , lorsque l'angle de gîte passe de la valeur  $\alpha_i$  à la valeur  $\alpha_j$ , est proportionnel au travail des actions de pesanteur développées par le mouvement du navire.

La réglementation impose à l'architecte naval de créer des formes de coque pour lesquelles :

- l'angle de gîte provoquant la mise en situation de chavirage du voilier (changement de signe de  $G_x$ ) soit au minimum de 120° (point D de la figure R1) ;
- le rapport des « aires » soit tel que  $\frac{S_{01}}{S_{12}} = 5$ . Le travail du poids est ainsi cinq fois plus grand dans la zone de redressement que dans la zone de chavirage : le bateau est cinq fois plus difficile à faire chavirer qu'à redresser.

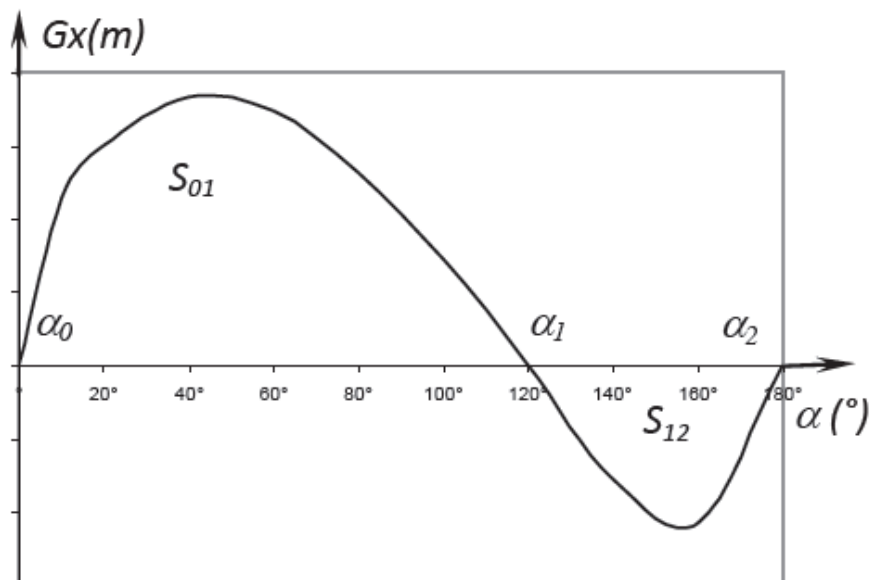


FIGURE 4 – Courbe de stabilité théorique : définition des « aires »  $S_{01}$  et  $S_{12}$

## 2.2 Présentation du système

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire (figures 5 et 6). Cette quille est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_N)$  avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci. La mise en mouvement et le blocage en position de la quille sont réalisés par une chaîne d'énergie étudiée dans la suite du sujet.



FIGURE 5 – Voilier avec sa quille pendulaire écartée au maximum sur « bâbord »

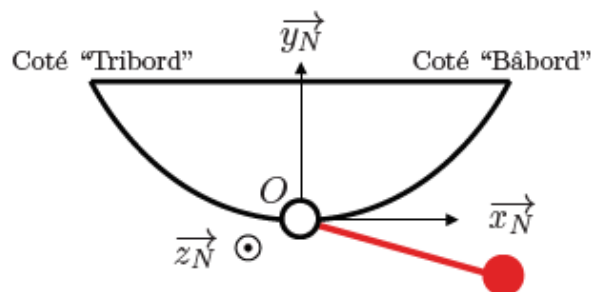


FIGURE 6 – Modèle cinématique élémentaire de la quille pendulaire

**Q2.** La figure R3 du document réponses donne les courbes de stabilité théorique d'un voilier dont la quille pendulaire est inclinée :

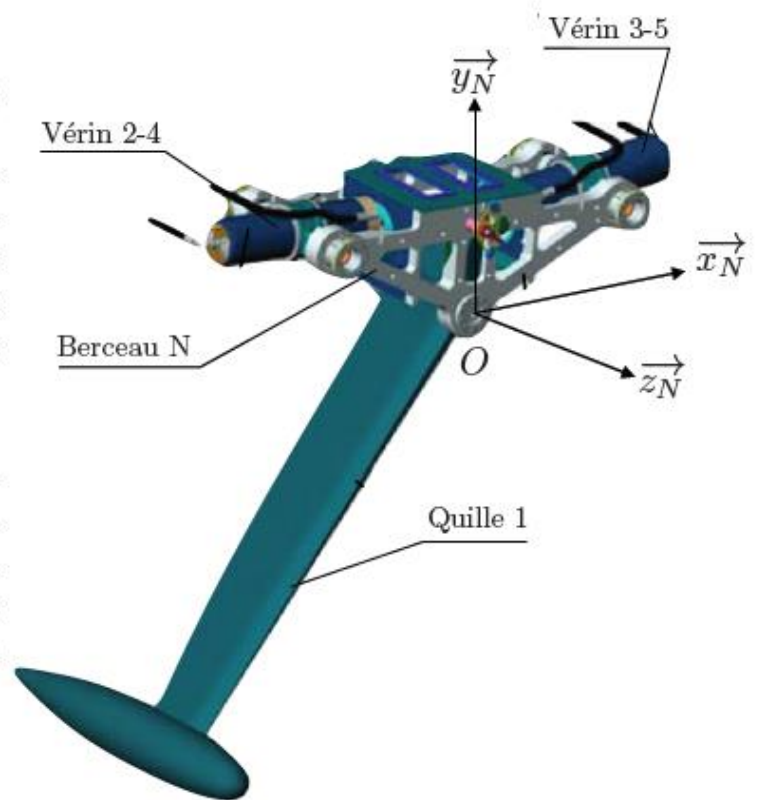
- au maximum sur « tribord » (à droite dans le sens de la marche) (courbe 1) ;
- d'un angle nul (courbe 2).

- a - Au vu de ces courbes, quels avantages procure la quille pendulaire au comportement du navire lorsqu'il gîte avec un angle  $\alpha$  positif ?
- b - Pour un angle de gîte  $\alpha$  négatif, quel est l'apport de la quille pendulaire ?
- c - Dans la situation de navigation où le vent vient de tribord et où la gîte ne doit pas être trop importante malgré la grande surface de voile déployée, quelle doit être la configuration de navigation à adopter ? Répondre par un dessin reproduisant la figure 6 et justifier le choix.

### 3 Éléments et fonctionnement

La quille pendulaire constitue un système dont l'exigence principale est « Orienter la quille ». Pour cela, elle utilise des vérins hydrauliques mettant en mouvement la quille via une chaîne de solides présentée figure ci-contre.

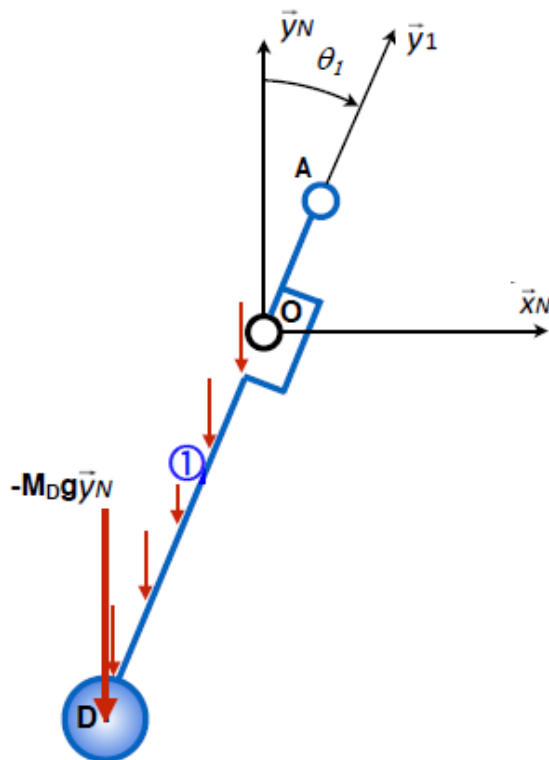
L'énergie hydraulique alimentant les vérins est créée par une centrale hydraulique et distribuée par des servo-valves. Des bloqueurs hydrauliques à pilotage électrique permettent de maintenir la position des vérins et donc de la quille.



## 4 Modélisation de l'action de la pesanteur sur la quille

### Objectif

Modéliser l'action mécanique exercée par la pesanteur sur la quille afin de valider le modèle proposé dans la partie 5.1.



Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à la quille modélisable dans le plan  $(\vec{x}_N, \vec{y}_N)$  par le schéma de la figure 7. On note  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  l'accélération de la pesanteur.

### Hypothèses :

- L'action de la gravité sur la quille est modélisée par :
  - un glisseur en  $D$ , modélisant le poids exercé sur le lest de masse  $M_D$  ;
  - une densité linéique d'effort  $\rho_l \cdot g$  (en N/m) s'exerçant sur le segment  $[OD]$  de longueur  $\ell_q$ , modélisant l'action de la pesanteur sur le voile de la quille. Entre les points  $O$  et  $A$ , la masse est négligeable.
- Le référentiel  $\mathcal{R}_N = (O, \mathcal{B}_N)$  est supposé galiléen pour l'étude.
- La quille est immobile dans le référentiel  $\mathcal{R}_N$ .

FIGURE 7 – Répartition du poids sur la quille ( $\theta_1 < 0$  ici)

**Q3.** Exprimer le torseur d'action mécanique en  $D$  de l'action du poids sur le lest noté  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow lest}\}$ . Le transposer en  $O$ .

**Q4.** Soit  $M$  un point appartenant au segment  $[OD]$  tel que  $\overrightarrow{OM} = y\vec{y}_1$  (avec  $y < 0$ ). Exprimer la résultante élémentaire, notée  $d\vec{R}_{pes \rightarrow voile}(M)$ , de l'action de la pesanteur sur un élément  $dy$  du segment  $[OD]$  centré sur  $M$ . En déduire l'expression du moment élémentaire calculé en  $O$ , noté  $d\vec{M}_{O, pes \rightarrow voile}(M)$ , de l'action de la pesanteur sur un élément  $dy$  du segment  $[OD]$  centré sur  $M$ .

**Q5.** Exprimer alors le torseur d'action mécanique en  $O$  de l'action de la pesanteur sur le segment  $[OD]$  de la quille, noté  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow voile}\}$ .

**Q6.** En déduire le torseur modélisation l'action mécanique de la pesanteur sur l'ensemble de la quille (voile et lest), noté  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow quille}\}$ , exprimé en  $O$ .

**Q7.** Montrer que le torseur  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow quille}\}$  peut se mettre sous la forme d'un torseur glisseur au centre de poussée  $P$  de l'action de la pesanteur sur la quille tel que  $\overrightarrow{OP} = y_p\vec{y}_1$ . On précisera l'expression de  $y_p$ .

## 5 Validation des vérins

### Objectif

Valider le choix des vérins retenus par le constructeur pour la quille pendulaire : course  $c$  de 2 m, diamètre  $D$  du piston de 182 mm.

La chaîne d'énergie permettant la mise en position de la quille est représentée et modélisée sur la figure 8. Cette chaîne est composée :

- du berceau N encastré sur la coque du navire et dont le repère associé est  $\mathcal{R}_N : (O; \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$  ;
- de la quille 1 constituée du voile et du lest d'extrémité et dont le repère associé est  $\mathcal{R}_1 : (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  tel que  $\theta_1 = (\vec{x}_N, \vec{x}_1) = (\vec{y}_N, \vec{y}_1)$  ;
- du vérin 2-4 constitué du piston 2 et du cylindre 4 et dont les repères associés sont respectivement  $\mathcal{R}_2 : (A_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et  $\mathcal{R}_4 : (C; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  (la rotation relative 2-4 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_4$  seront confondues) avec  $\theta_2 = (\vec{x}_N, \vec{x}_2) = (\vec{y}_N, \vec{y}_2)$  ;
- du vérin 3-5 constitué du piston 3 et du cylindre 5 et dont les repères associés sont respectivement  $\mathcal{R}_3 : (A_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  et  $\mathcal{R}_5 : (B; \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)$  (la rotation relative 3-5 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de  $\mathcal{R}_3$  et  $\mathcal{R}_5$  seront confondues) avec  $\theta_3 = (\vec{x}_N, \vec{x}_3) = (\vec{y}_N, \vec{y}_3)$ .

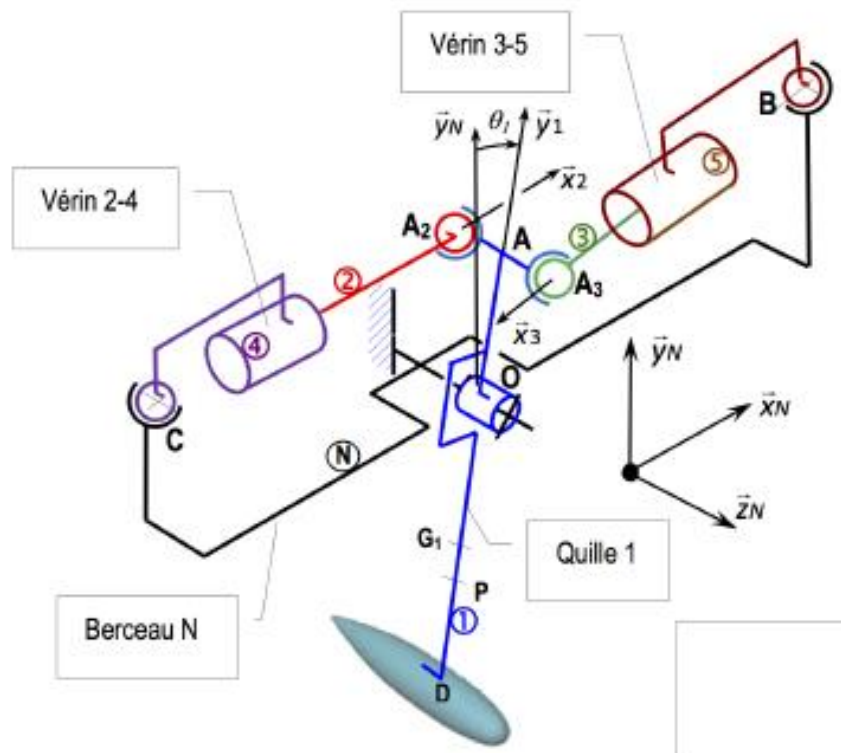


FIGURE 8 – Schéma cinématique du système d'orientation de la quille

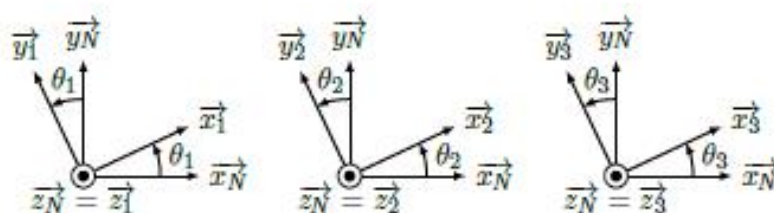


FIGURE 9 – Figures de projection

On pose le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= r\vec{y}_1; & \overrightarrow{AA_2} &= -d\vec{z}_N; & \overrightarrow{AA_3} &= d\vec{z}_N; & \overrightarrow{OC} &= -a\vec{x}_N + b\vec{y}_N - d\vec{z}_N; & \overrightarrow{DO} &= L_{t1}\vec{y}_1; \\ \overrightarrow{OG_1} &= -L_1\vec{y}_1; & \overrightarrow{CA_2} &= x_{24}\vec{x}_2; & \overrightarrow{BA_3} &= x_{35}\vec{x}_3; & & & & \end{aligned}$$

avec  $r = 1,1 \text{ m}$ ,  $a = 2,3 \text{ m}$ ,  $b = 1,4 \text{ m}$ ,  
 $d = 0,2 \text{ m}$ ,  $L_1$  et  $L_{t1}$  positifs.

## 5.1 Maintien d'une position de la quille

### Objectif

Valider le diamètre  $D$  du vérin vis-à-vis d'une pression  $p_h$  disponible pour assurer le maintien d'une position angulaire de la quille.

### Hypothèses

- Le référentiel  $\mathcal{R}_N = (O, \mathcal{B}_N)$  est supposé galiléen pour l'étude.
- On suppose le problème plan  $(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$  pour cette partie de l'étude.
- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Les vérins 2-4 et 3-5 sont moteurs et produisent une action combinée, de sorte que l'action mécanique motrice de la pression hydraulique est donnée par

$$\{\mathcal{T}_{ph \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F_h \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{ph \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} -F_h \cdot \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

avec  $F_h$  une constante positive. On suppose ainsi que chaque vérin développe une force identique.

- On suppose que l'action de la pesanteur sur la quille peut se mettre sous la forme d'un glisseur en un point  $P$  tel que  $\vec{OP} = y_p \vec{y}_1$  et l'on note cette action mécanique :  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow quille}\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_q g \vec{y}_N \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$  avec  $y_p = -2$  m et  $M_q = 4100$  kg. On gardera la notation  $y_p$  pour la suite du sujet sans la remplacer par l'expression trouvée à la question Q7.
- Les poids des éléments constitutifs des deux vérins sont négligés.
- Les actions hydrodynamiques sur le voile et le lest de quille sont également négligées.
- Les conditions de déplacement rendent négligeables les effets dynamiques. Les théorèmes de la statique seront donc utilisés dans la suite.

On résume alors les actions mécaniques considérées dans cette partie à l'aide de la figure suivante.

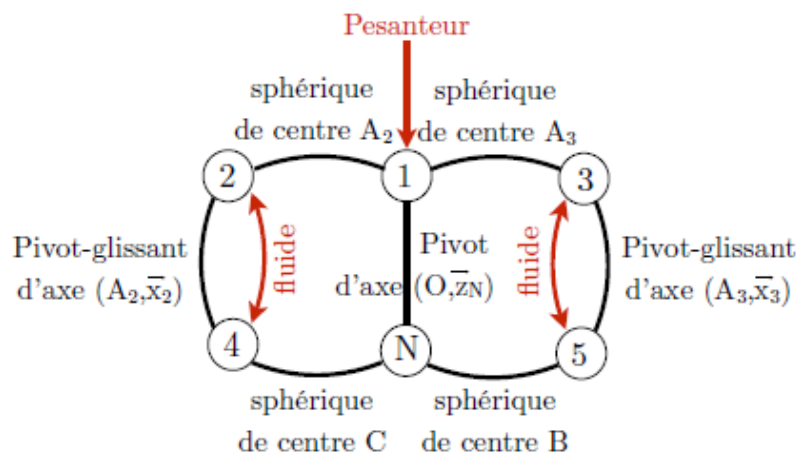


FIGURE 10 – Graphe de structure et actions mécaniques considérées

### Notation

On notera le torseur d'une action mécanique transmise par la liaison  $\mathcal{L}_{i/j}$  entre deux solides, exprimé en un point  $K$  dans la base  $\mathcal{B}_\ell$  :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{K, \mathcal{B}_\ell}$$

Q8. En choisissant judicieusement les points de réduction, donner la forme des torseurs d'actions mécaniques transmises par les liaisons :

- $\mathcal{L}_{N/4}$ ,  $\mathcal{L}_{4/2}$  et  $\mathcal{L}_{2/1}$  dans la base  $\mathcal{B}_2$  ;
- $\mathcal{L}_{N/1}$  dans la base  $\mathcal{B}_N$  ;
- $\mathcal{L}_{N/5}$ ,  $\mathcal{L}_{5/3}$  et  $\mathcal{L}_{3/1}$  dans la base  $\mathcal{B}_3$ .

Q9. Quels ensembles de solides sont soumis à exactement deux actions mécaniques extérieures modélisées par des glisseurs ? En isolant l'un d'eux, montrer que la résultante de l'action de 2 sur 1, transmissible via la liaison  $\mathcal{L}_{2/1}$ , peut s'écrire  $F_{21} \cdot \vec{x}_2$ .

Q10. Isoler le solide 2. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures. Puis, en précisant le théorème utilisé, l'éventuel point d'application et la direction de projection, en déduire l'expression de  $F_{21}$ .

**Q11.** Par analogie, écrire le torseur modélisant l'action mécanique de 3 sur 1 en  $A_3$ , noté  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\}$ , en fonction de  $F_h$ .

**Q12.** En isolant un solide pertinent et en considérant son équilibre, déterminer l'expression de  $F_h$  en fonction de  $M_q$ ,  $y_p$ ,  $g$  et des différents paramètres géométriques du problème. On précisera le théorème utilisé, l'éventuel point d'application et la direction de projection.

**Q13.** Après avoir exprimé la surface  $S$  du piston en fonction de son diamètre  $D$ , écrire l'expression de la pression hydraulique  $p_h$  en fonction de  $M_q$ ,  $y_p$ ,  $g$  et des différents paramètres géométriques du problème.

On suppose que l'orientation limite de la quille, qui représente le cas le plus défavorable du point de vue de l'effort à fournir par les vérins pour maintenir la quille, est tel que :

$$\theta_1 = -70^\circ \text{ alors } \theta_2 = -20^\circ \text{ et } \theta_3 = 200^\circ$$

**Q14.** Vérifier que la pression hydraulique est suffisante pour satisfaire l'exigence de manœuvrabilité de la quille dans le cas le plus défavorable décrit ci-dessus, c'est-à-dire qu'elle reste inférieure à la pression hydraulique maximale disponible :  $p_{h \text{ max}} = 6 \text{ MPa}$ .

## 5.2 Réalisation d'une position de la quille

### Objectif

Valider la course  $c$  du vérin retenu vis-à-vis de l'atteinte d'une position extrême de la quille.

Dans cette partie du sujet, on restreint l'étude à la partie du mécanisme pendulaire constituée des pièces **N**, **1**, **2** et **4**. Pour simplifier l'étude, on adoptera le schéma cinématique suivant.

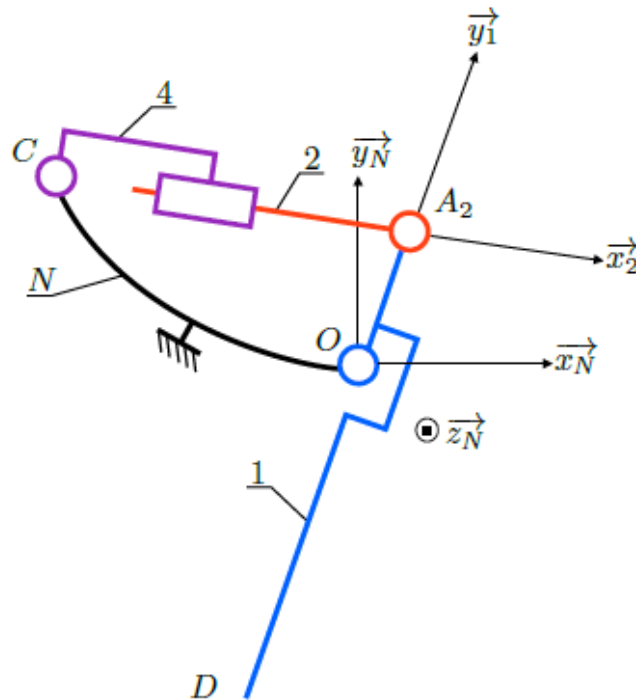


FIGURE 11 – Schéma cinématique simplifié du demi-mécanisme pendulaire

**Q15.** Quelle hypothèse de modélisation a été faite pour obtenir le schéma cinématique de la figure 11 ? En quoi est-elle justifiée ?

**Q16.** Réaliser le graphe de liaisons associé aux pièces **N**, **1**, **2** et **4** correspondant au schéma cinématique proposé.

**Q17.** Par une méthode graphique (utilisant la figure R4 du document réponses) ou une méthode analytique (utilisant le paramétrage posé en début de partie 5), déterminer la course du vérin, c'est-à-dire la variation de la longueur entre les points  $C$  et  $A_2$  entre les positions extrêmes de la quille :  $\theta_1 = -70^\circ$  et  $\theta_1 = +70^\circ$ . Valider le choix du vérin.

## 6 Gestion de la limitation de la vitesse angulaire de la quille

### Objectif

Limiter la vitesse de rotation de la quille à  $\dot{\theta}_1_{max} = 8 \text{ }^\circ \cdot \text{s}^{-1}$  au maximum.

**Q18.** Expliquer qualitativement la nécessité de limiter la vitesse de rotation de la quille.

Sur un navire, l'énergie embarquée est limitée. La conception du système de pendulation de la quille doit donc prendre en compte cette contrainte importante. Pour actionner les vérins, la puissance motrice est fournie par une centrale hydraulique délivrant la pression  $p_h$ . La puissance mécanique fournie par le vérin va donc limiter le produit  $p_h \cdot V$  où  $V$  est la vitesse de translation du vérin. La translation du vérin **2-4** génère le mouvement de rotation de la quille. On considère toujours le modèle simplifié de la figure 11.

**Q19.** Par une étude appropriée, déterminer la valeur maximale de la composante selon  $\vec{x}_2$  du vecteur vitesse du point  $A$  dans le mouvement du solide **2** par rapport au solide **4**,  $\max(\vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2)$ , permettant de respecter la limite de vitesse angulaire de  $8 \text{ }^\circ \cdot \text{s}^{-1}$ .

Cette limitation de vitesse de translation nécessite de programmer une saturation (cf. figure 13) dans l'algorithme de commande de la structure asservie de positionnement de la quille. Il est donc nécessaire de connaître la valeur maximale du débit d'huile fournie au vérin par l'intermédiaire de la servovalve.

**Q20.** En adoptant l'hypothèse d'incompressibilité de l'huile utilisée dans le vérin hydraulique, déterminer la valeur maximale du débit, notée  $q_{max}$ , en L/min.

On considère cette valeur affectée à une variable `q_max` définie dans l'en-tête d'un programme en langage Python. De même, la variable globale `v_max` est considérée définie.

**Q21.** Écrire une fonction `saturation` prenant comme argument une valeur de la tension  $v$  et renvoyant la valeur du débit  $q$  selon le comportement décrit par la figure 13. On utilisera le langage Python.



FIGURE 12 – Bloc de la servovalve

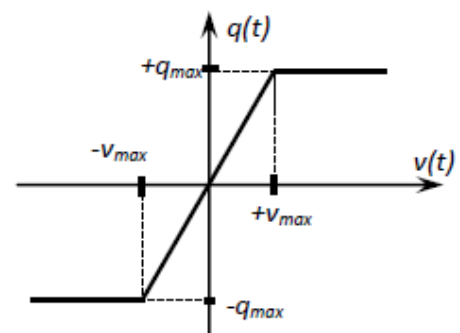


FIGURE 13 – Comportement souhaité de la servovalve selon la tension  $v$  imposée

**Q22.** Justifier la non-linéarité du système « servovalve ».

## 7 Étude du guidage de la quille par rapport à la coque

### Objectif

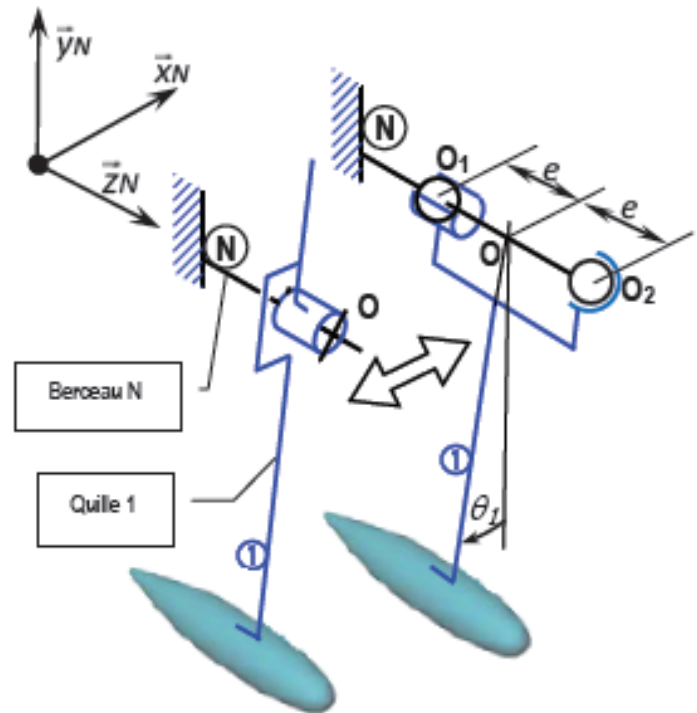
L'objectif de cette partie est de valider la solution technologique de réalisation de la liaison pivot entre la quille et la coque.

La liaison pivot entre la quille 1 et le berceau N est réalisée par la mise en parallèle d'une liaison sphérique et d'une liaison sphère-cylindre (cf. figures 14 et 15) réalisées par deux coussinets (cf. figure 16).

On note  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}}$  le torseur de l'action mécanique transmise par la liaison sphère-cylindre,  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphérique}}$  le torseur de l'action mécanique transmise par la liaison sphérique et  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{pivot}}$  le torseur de l'action mécanique transmise par la liaison pivot.

### Hypothèses :

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- L'action mécanique exercée par le berceau N sur la quille 1 peut être représentée par le torseur simplifié suivant :
 
$$\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{pivot}} = \left\{ \begin{array}{c} -2F_h \vec{x}_N + M_q g \vec{y}_N \\ 2dF_h \vec{y}_N \end{array} \right\}_O$$
 On considère le cas le plus défavorable où  $F_h = 156 \text{ kN}$ . On rappelle que  $d = 0,2 \text{ m}$  et  $M_q = 4 \text{ 100 kg}$ .
- Les conditions de déplacement rendent né-



gligeables les effets dynamiques. Les théorèmes de la statique seront donc utilisés dans la suite.

FIGURE 14 – Composition de la liaison pivot entre 1 et N

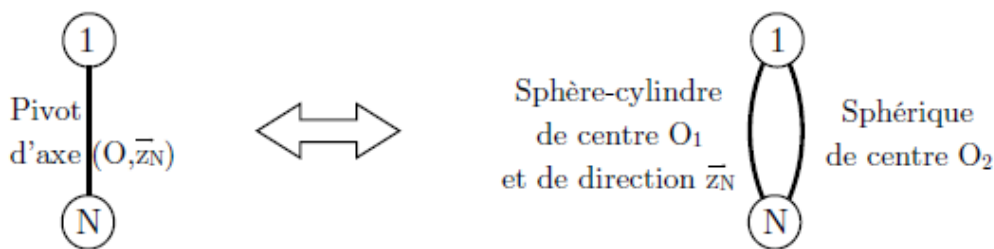


FIGURE 15 – Modèles cinématiquement équivalents

La géométrie de l'assemblage est telle que :  $\overrightarrow{OO_2} = e.\vec{z}_N$  ;  $\overrightarrow{OO_1} = -e.\vec{z}_N$  avec  $e = 350mm$ .

**Q23.** En choisissant judicieusement les points de réduction, donner la forme des torseurs d'action mécanique  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}}$  et  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphérique}}$  dans la base  $\mathcal{B}_N$ . Les réduire au point  $O_2$ .

**Q24.** Dans chacune des configurations de la figure 14, isoler le solide 1 et faire le bilan des actions mécaniques. Écrire ainsi la relation liant les torseurs d'action mécanique  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}}$ ,  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphérique}}$  et  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{pivot}}$ .

**Q25.** En déduire les éléments de réduction en  $O_1$ , dans la base  $\mathcal{B}_N = (\vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$ , du torseur d'action mécanique de N sur 1 transitant par la liaison sphère-cylindre, noté  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}}$ , en fonction de  $d, g, e, M_q$  et  $F_h$ .

Les coussinets sont constitués de contacts cylindriques de diamètre  $d_c = 80 \text{ mm}$  et de longueur  $L_c = 50 \text{ mm}$ . Un coussinet en nylon sert d'interface entre la quille et le navire. Ce coussinet est caractérisé par sa pression de contact maximale admissible :  $p_{adm} = 80 \text{ N/mm}^2$ .

On définit l'effort radial  $\vec{F}$  comme l'effort perpendiculaire à l'axe géométrique du coussinet. Les figures 16 et 17 représentent le cas particulier dans lequel  $\vec{F}$  est colinéaire à  $\vec{x}_N$ .

**Q26.** Exprimer la norme de ce vecteur,  $\|\vec{F}\|$ , lorsque :  $\vec{F}$  est colinéaire à  $\vec{x}_N$ ,  $\vec{F}$  est colinéaire à  $\vec{y}_N$ ,  $\vec{F}$  est de direction quelconque. Réaliser les applications numériques.

Les coussinets utilisés sont identiques et décrits sur la figure 16 ci-contre. On suppose que le coussinet positionné en  $O_1$  est soumis à une pression de contact supposée répartie uniformément sur le demi-cylindre intérieur du coussinet opposé à la charge radiale  $F$ . La figure 17 donne le paramétrage de cette répartition de pression.

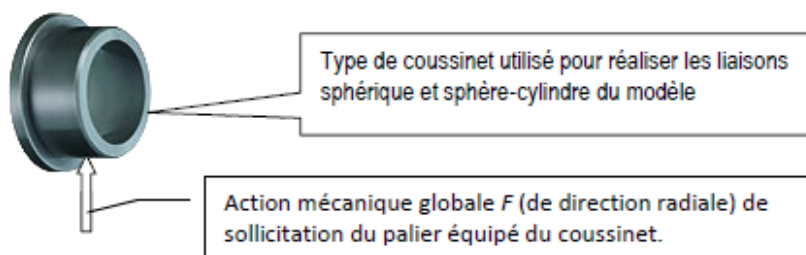


FIGURE 16 – Géométrie du coussinet utilisé

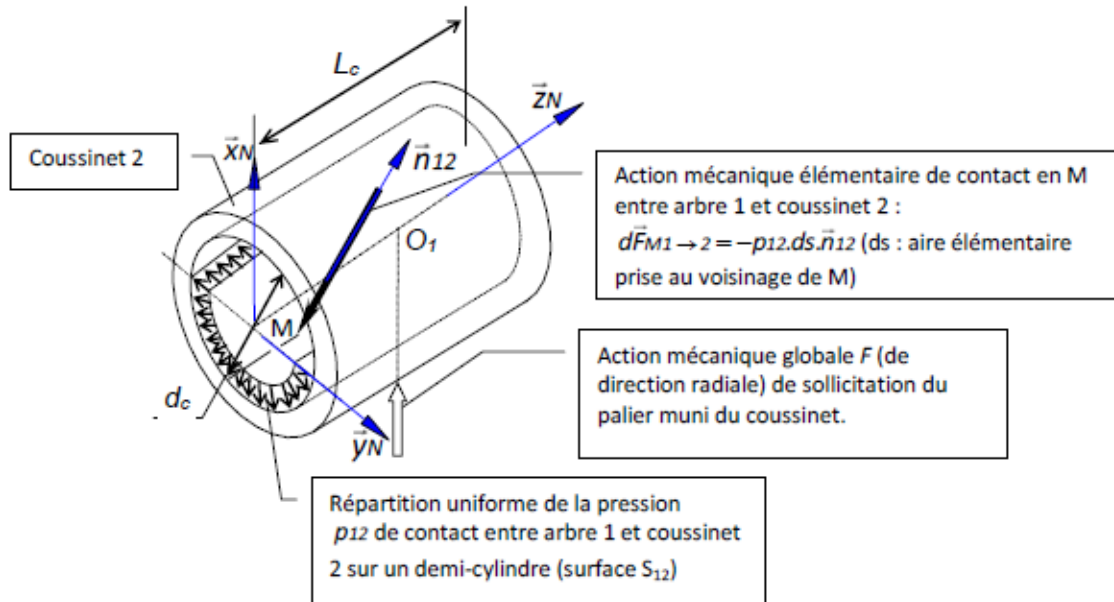


FIGURE 17 – Modélisation de la répartition d'effort sur le coussinet

Q27. En utilisant le paramétrage de la figure 17, montrer que l'action mécanique globale  $\vec{F}$  s'écrit  $\vec{F} = -p_{12}d_cL_c\vec{x}_N$ , où  $d_c$  est le diamètre du coussinet et  $L_c$  sa longueur. On posera  $\alpha = (\vec{x}_N, \vec{n}_{12})$ .

Q28. Valider l'usage de ce coussinet de nylon vis-à-vis de la pression maximale admissible  $p_{adm}$ .

# - DOCUMENT RÉPONSES -

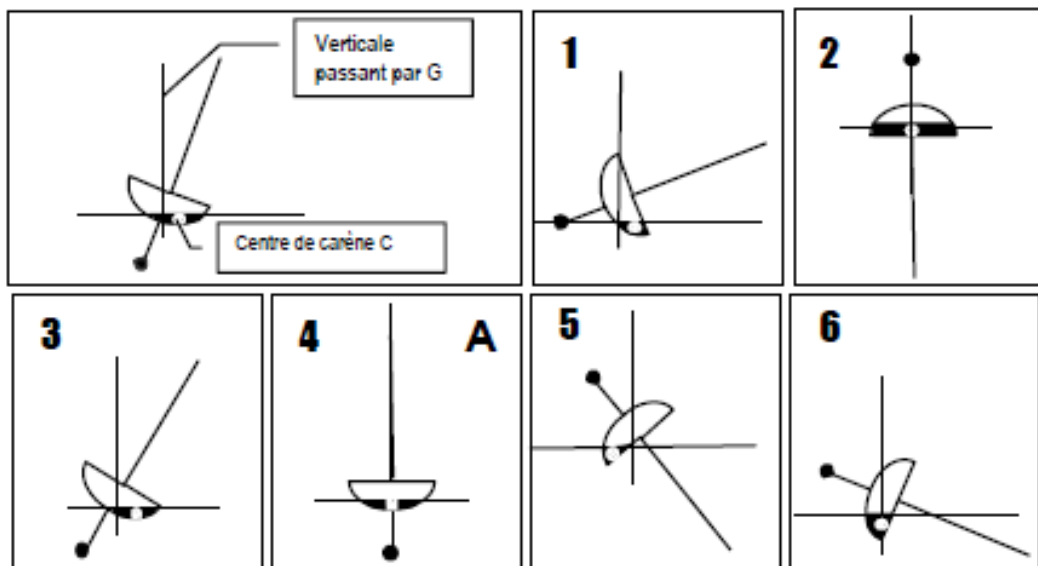
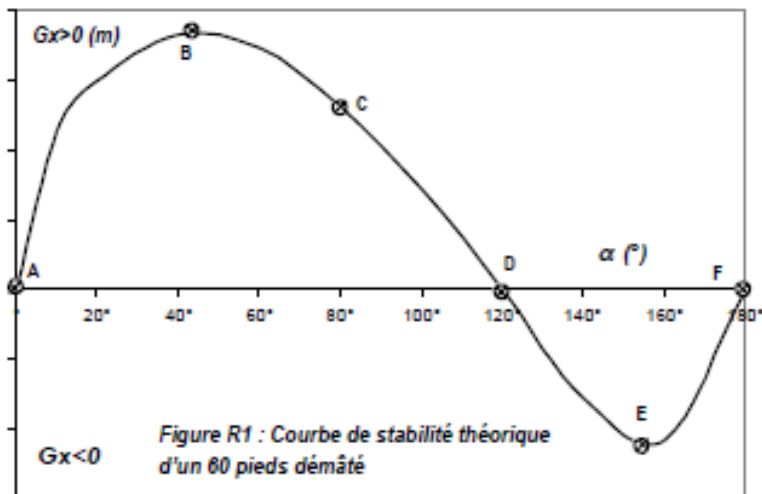
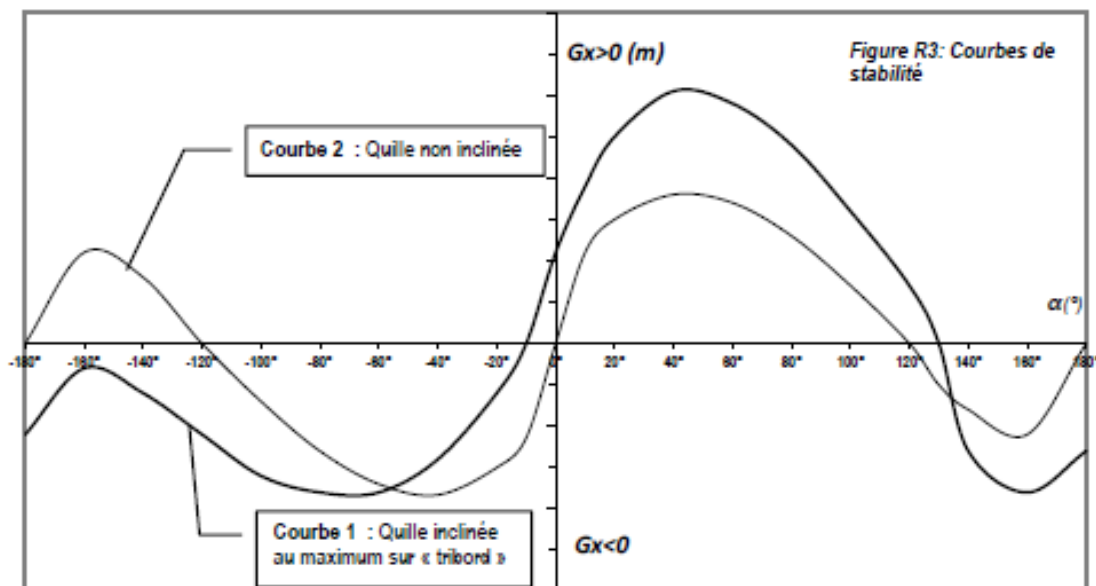


Figure R2 : Positions d'équilibre



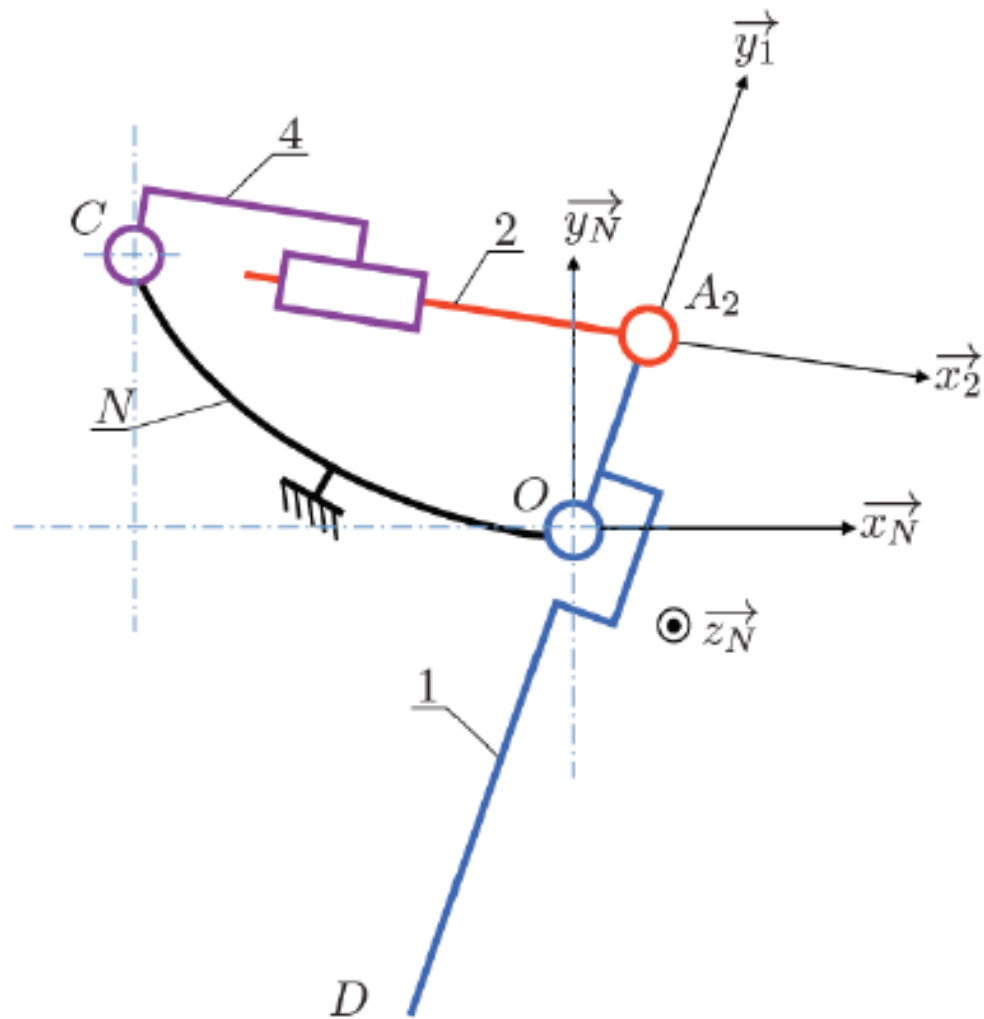


Figure R4 : schéma cinématique plan pour réalisation des tracés géométriques  
 Échelle non précisée ; on rappelle que  $\overrightarrow{OA_2} \cdot \vec{y}_1$  vaut 1,1 m en réel.

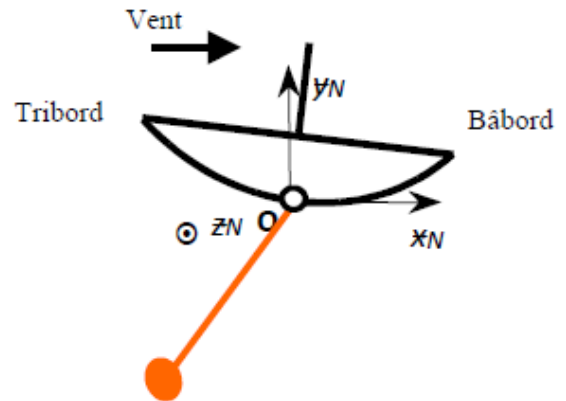
## Corrigé

Q1. a -  $R_D$  est toujours positif (poussée d'Archimède) donc  $G_x$  suffit à caractériser le signe de  $R_D G_x$ .  
 b - B3, C1, D6, E5 et F2. Ou encore : 1C, 2F, 3B, 5E et 6D.

Q2. a- Pour  $\alpha > 0$ , la quille pendulaire permet d'augmenter l'énergie nécessaire pour faire basculer le navire (rapport  $\frac{S_{01}}{S_{02}}$  plus grand) et de repousser la limite de chavirage à  $130^\circ$ .  $G_x$  est plus grand pour  $0 < \alpha < 130^\circ$ , donc le bateau s'inclinera moins pour une même action extérieure (vent, houle...).

b- Pour  $\alpha < 0$ , le basculement devient impossible car  $G_x$  ne change pas de signe. Par contre  $|G_x|$  est plus petit pour  $-50^\circ < \alpha < 0$ , donc le bateau s'inclinera plus pour une même action extérieure.

c- Si le vent vient de tribord alors  $\vec{M}_{H,vent \rightarrow nav.} \cdot \vec{z} < 0$ , il faut donc  $G_x > 0$  et grand pour limiter l'inclinaison du bateau. On choisit la quille inclinée au maximum sur tribord.



Q3. D'après le texte, on a en  $D$  :  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow lest}\}_D = \begin{Bmatrix} -M_{DG} \vec{y}_N \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$ .

Par changement de point, on obtient alors en  $O$  :  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow lest}\}_O = \begin{Bmatrix} -M_{DG} \vec{y}_N \\ -l_q \sin \theta_1 M_{DG} \vec{z}_N \end{Bmatrix}_O$ .

Q4. La résultante élémentaire s'exerçant sur un élément  $dy$  centré sur  $M$  est :

$$d\vec{R}_{pes \rightarrow voile}(M) = -\rho_l g dy \vec{y}_N. \text{ On en déduit : } d\vec{M}_{O,pes \rightarrow voile}(M) = y \vec{y}_1 \wedge -\rho_l g dy \vec{y}_N = \rho_l g y dy \sin \theta_1 \vec{z}_N.$$

Q5. Le torseur d'action mécanique se déduit de l'action mécanique élémentaire décrite par la résultante et le moment en  $O$  question précédente. Ainsi :  $\vec{R}_{pes \rightarrow voile} = \int_{y=-l_q}^{y=0} d\vec{R}_{pes \rightarrow M} = -\rho_l g l_q \vec{y}_N$  et

$$\vec{M}_{O,pes \rightarrow voile} = \int_{y=-l_q}^{y=0} d\vec{M}_{O,pes \rightarrow voile} = -\rho_l g \frac{l_q^2}{2} \sin \theta_1 \vec{z}_N. \text{ D'où : } \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow voile}\}_O = \begin{Bmatrix} -\rho_l g l_q \vec{y}_N \\ -\rho_l g \frac{l_q^2}{2} \sin \theta_1 \vec{z}_N \end{Bmatrix}_O.$$

Q6. En  $O$ , la pesanteur exerce son action sur la quille et sur le lest. Ainsi :

$$\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow quille}\}_O = \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow voile}\}_O + \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow lest}\}_O = \begin{Bmatrix} -(\rho_l g l_q + M_{DG}) \vec{y}_N \\ -\sin \theta_1 (\rho_l g \frac{l_q^2}{2} + l_q M_{DG}) \vec{z}_N \end{Bmatrix}_O$$

Q7. Le torseur  $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow quille}\}$  peut se mettre sous la forme d'un glisseur au centre de poussée  $P$  si  $\vec{M}_{P,pes \rightarrow quille} = \vec{0}$ . Or :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{P,pes \rightarrow quille} &= \vec{M}_{O,pes \rightarrow quille} + \vec{P}O \wedge \vec{R}_{pes \rightarrow quille} = -\sin \theta_1 (\rho_l g \frac{l_q^2}{2} + l_q M_{DG}) \vec{z}_N - y_p \vec{y}_1 \wedge -(\rho_l g l_q + M_{DG}) \vec{y}_N \\ &= -\sin \theta_1 (\rho_l g \frac{l_q^2}{2} + l_q M_{DG}) \vec{z}_N - y_p \sin \theta_1 (\rho_l g l_q + M_{DG}) \vec{z}_N \end{aligned}$$

Ainsi,  $P$  est centre de poussée si :  $\rho_l g \frac{l_q^2}{2} + l_q M_D g = -y_p (\rho_l g l_q + M_D g) \Leftrightarrow y_p = -\frac{\rho_l \frac{l_q^2}{2} + l_q M_D}{\rho_l l_q + M_D}$

Q8. Pour les sphériques (ou rotules), on se place au centre. Pour les pivots et pivots glissants, sur les axes :

$$\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{N4} & 0 \\ Y_{N4} & 0 \\ Z_{N4} & 0 \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{B}_2} \quad \{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{42} & M_{42} \\ Z_{42} & N_{42} \end{Bmatrix}_{C, \mathcal{B}_2} \quad \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{A_2, \mathcal{B}_2}$$

$$\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{N1} & L_{N1} \\ Y_{N1} & M_{N1} \\ Z_{N1} & 0 \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_N}$$

$$\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} X_{N5} & 0 \\ Y_{N5} & 0 \\ Z_{N5} & 0 \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{B}_3} \quad \{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{53} & M_{53} \\ Z_{53} & N_{53} \end{Bmatrix}_{B, \mathcal{B}_3} \quad \{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{31} & 0 \\ Y_{31} & 0 \\ Z_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{A_3, \mathcal{B}_3}$$

Q9.  $\{2+4\}$  et  $\{3+5\}$  sont chacun soumis à deux actions mécaniques modélisables par des glisseurs (les actions des fluides deviennent intérieures!).

On isole le vérin 4-2, en équilibre sous les actions de N sur 4 et à de 1 sur 2 dans le référentiel lié à N, supposé galiléen. Le PFS s'applique et on écrit en  $A_2$  :

$$\begin{cases} X_{N4} + X_{12} = 0 \\ Y_{N4} + Y_{12} = 0 \\ Z_{N4} + Z_{12} = 0 \\ 0 = 0 \\ x_{24} Z_{N4} = 0 \\ -x_{24} Y_{N4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{N4} = -X_{12} \\ Y_{N4} = Y_{12} = 0 \\ Z_{N4} = Z_{12} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'action de 1 sur 2 peut être représentée par un glisseur en  $A_2$  de résultante  $X_{12} \vec{x}_2$  :  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2}$ . Par le principe des actions réciproques, on a alors :  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = -\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$ .

On pose  $F_{21} = -X_{12}$  et alors :  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_{21} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2}$ .

Q10. En isolant 2 et en appliquant le TRS sur la direction  $\vec{x}_2$ , on obtient directement  $F_{21} = F_h$ . Alors,

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_h \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_2}$$

Q11. Par un raisonnement similaire, on trouve directement  $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} -F_h \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_3}$ .

Q12. On isole l'ensemble de la quille 1 et on applique le TMS en  $O$  selon  $\vec{z}_N$ . Il vient :

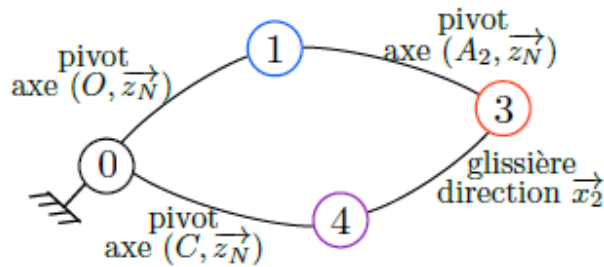
$$\begin{aligned} 0 + [O\vec{A}_2 \wedge F_h \vec{x}_2 + O\vec{A}_3 \wedge (-F_h \vec{x}_3) + O\vec{P} \wedge (-M_{qg} \vec{y}_N)] \cdot \vec{z}_N &= 0 \\ \Rightarrow -F_h [r \cos(\theta_2 - \theta_1)] + F_h [r \cos(\theta_3 - \theta_1)] + y_p M_{qg} \sin \theta_1 &= 0 \\ \Rightarrow F_h = \frac{y_p}{r [\cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos(\theta_3 - \theta_1)]} \sin \theta_1 M_{qg} \end{aligned}$$

Q13.  $S = \pi \frac{D^2}{4}$  et  $F_h = p_h S$  d'où :  $p_h = \frac{4}{\pi D^2} \frac{y_p M_{qg} \sin \theta_1}{r [\cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos(\theta_3 - \theta_1)]}$

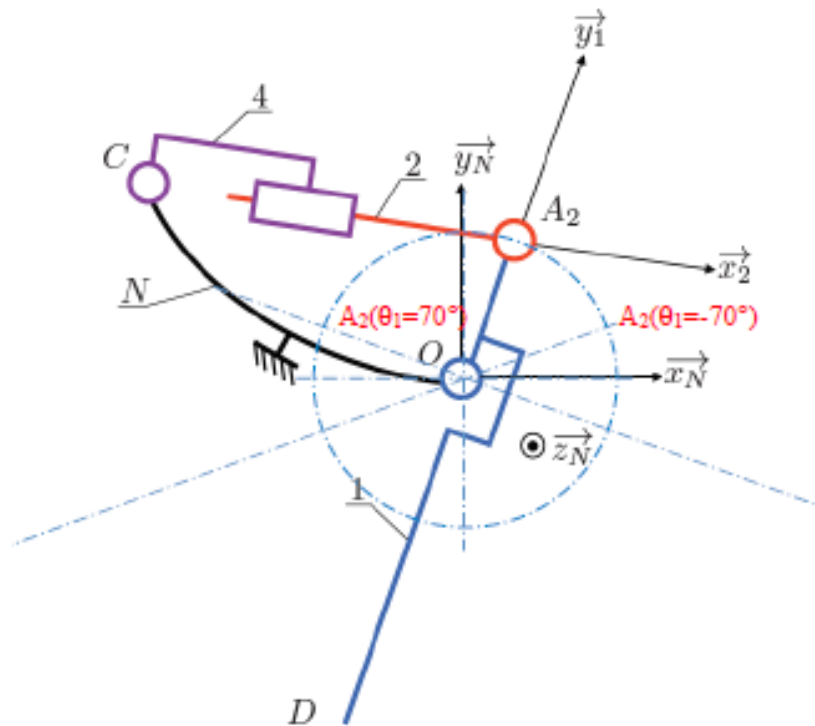
Q14. A.N. :  $p_h \simeq 4,7 \cdot 10^6 \text{ Pa} \simeq 4,7 \text{ MPa} < p_{h \text{ max}}$ . Le diamètre du vérin est validé ; la pression hydraulique est suffisante pour l'application.

Q15. Les liaisons sphériques ont été remplacées par des liaisons pivots et les pivots glissants par des liaisons glissières ce qui correspond à l'hypothèse de modélisation plane. Elle est justifiée dans le sens où tous les mouvements utiles du mécanisme ont lieu dans des plans parallèles au plan  $(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$ .

Q16. On obtient une chaîne simple fermée.



Q17. [Approche graphique] On trace le cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$  ainsi que les deux droites passant par  $O$  orientées à  $\pm 70^\circ$  de  $(O, \vec{y}_N)$ .



On mesure la course nécessaire  $c_n$  en faisant la différence entre les deux positions extrêmes du point  $A_2$  par rapport à  $C$  :  $c_n = CA_2(\theta_1 = -70^\circ) - CA_2(\theta_1 = 70^\circ)$  soit  $\boxed{c_n = 1,9 \text{ m}}$  (compte tenu de l'échelle). C'est inférieur à 2 m : le vérin retenu peut atteindre les positions extrêmes de la quille.

**[Approche analytique]** On réalise une fermeture géométrique sur la chaîne de solides considérée :  $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2C} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$ . Soit  $r\vec{y}_1 - x_{24}\vec{x}_2 + a\vec{x}_N - b\vec{y}_N = \vec{0}$ . En projection dans la base  $\mathcal{B}_N$ , on obtient :

$$\begin{cases} -r \sin(\theta_1) - x_{24} \cos(\theta_2) + a = 0 \\ -r \cos(\theta_1) - x_{24} \sin(\theta_2) - b = 0 \end{cases}$$

On élimine  $\theta_2$  pour obtenir :  $x_{24} = \sqrt{(a - r \sin(\theta_1))^2 + (r \cos(\theta_1) + b)^2}$ . La course du vérin s'écrit ainsi :  $c_n = \sqrt{(a - r \sin(-70^\circ))^2 + (r \cos(-70^\circ) + b)^2} - \sqrt{(a - r \sin(70^\circ))^2 + (r \cos(70^\circ) + b)^2}$ . A.N. :

$c_n \simeq 1,6 \text{ m}$ . C'est inférieur à 2 m : le vérin retenu peut atteindre les positions extrêmes de la quille.

**Q18.** On limite la vitesse de rotation de la quille pour ne pas avoir à fournir un effort trop important pour la manœuvre. Cela est nécessaire compte tenu de la puissance embarquée limitée. Si la quille tourne à vitesse importante, les effets dynamiques des masses en rotation ne sont pas négligeables, ni les actions hydrodynamiques : l'eau fournit une résistance qui augmente avec la vitesse.

**Q19. [Méthode 1]** On remarque que la vitesse de rotation maximale de la quille est obtenue lorsque l'angle  $\widehat{CA_2O}$  est droit. La vitesse de translation du vérin vaut alors :  $\max(\vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2) = r\dot{\theta}_1 \text{ max}$ .  
A.N. :  $\max(\vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2) \simeq 0,15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**[Méthode 2]** On utilise la composition du mouvement et le changement de point :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2 &= \left( \vec{V}_{A_2 \in 2/1} + \vec{V}_{A_2 \in 1/N} + \vec{V}_{A_2 \in N/4} \right) \cdot \vec{x}_2 \\ &= \left( \vec{0} + \vec{V}_{O \in 1/N} + \overrightarrow{A_2O} \wedge \vec{\Omega}_{1/N} + \vec{V}_{C \in N/4} + \overrightarrow{A_2C} \wedge \vec{\Omega}_{N/4} \right) \cdot \vec{x}_2 \\ &= \left( -r\vec{y}_1 \wedge \dot{\theta}_1\vec{z}_1 - x_{24}\vec{x}_2 \wedge (-\dot{\theta}_2\vec{z}_1) \right) \cdot \vec{x}_2 \\ &= -r\dot{\theta}_1\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = -r\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

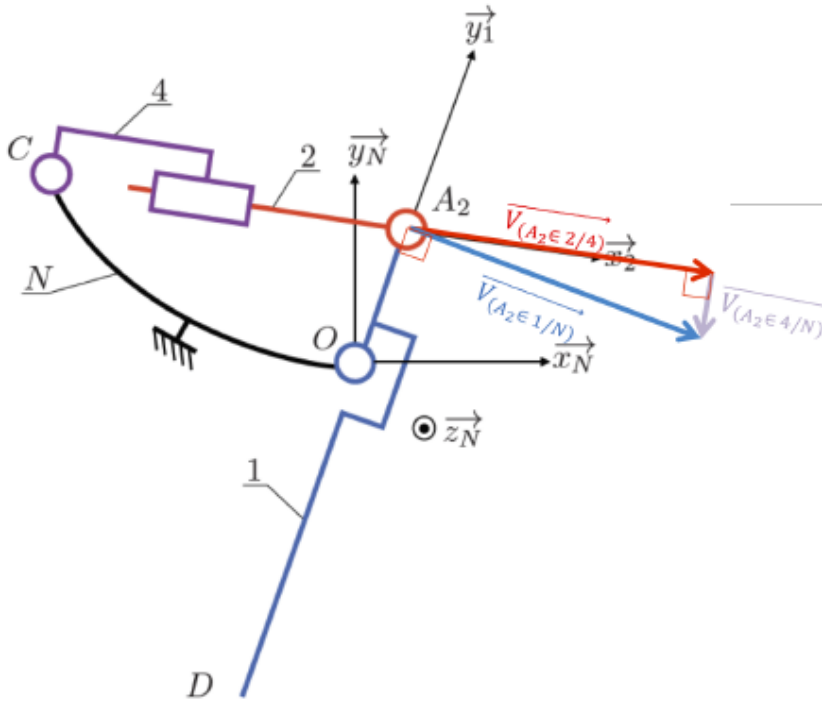
Cette vitesse est maximale lorsque  $\theta_2 - \theta_1 = \pi$  et  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1 \text{ max}$ . Elle s'écrit alors :

$$\max(\vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2) = r\dot{\theta}_1 \text{ max}. \text{ A.N. : } \max(\vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2) \simeq 0,15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

**[Méthode 3]** On interprète graphiquement la composition de vitesses (voir figure suivante) :

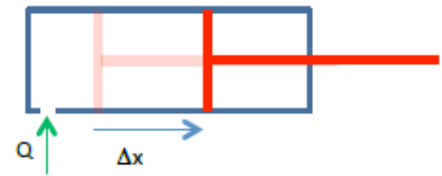
$$\vec{V}_{A_2 \in 2/4} = \underbrace{\vec{V}_{A_2 \in 2/1}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{V}_{A_2 \in 1/N}}_{\perp \vec{OA}_2} + \underbrace{\vec{V}_{A_2 \in N/4}}_{\perp \vec{CA}_2}$$

Alors,  $\vec{V}_{A_2 \in 2/4}$  est maximale si  $\vec{V}_{A_2 \in N/4} = \vec{0}$  càd si  $\widehat{CA_2O} = \frac{\pi}{2}$ . Alors  $\|\vec{V}_{A_2 \in 2/4}\| = \|\vec{V}_{A_2 \in 1/N}\| = r|\dot{\theta}_1|$  et donc  $\boxed{\max(\vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2) = r\dot{\theta}_1 \max}$ . A.N. :  $\max(\vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2) \simeq 0,15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .



**Q20.** Pendant un laps de temps  $\Delta t$ , le piston du vérin s'est déplacé d'une distance  $\Delta x$  grâce à la quantité d'huile (supposée incompressible) injectée. Le volume d'huile injecté vaut  $S\Delta x$  avec  $S$  la surface du piston. D'où :  $Q\Delta t = S\Delta x$ . En considérant des variations infinitésimales, on obtient :  $Q(t) = S \cdot \frac{dx}{dt} = S \cdot V$  avec, ici,  $V = |\vec{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2|$ . Le débit maximal vaut alors :

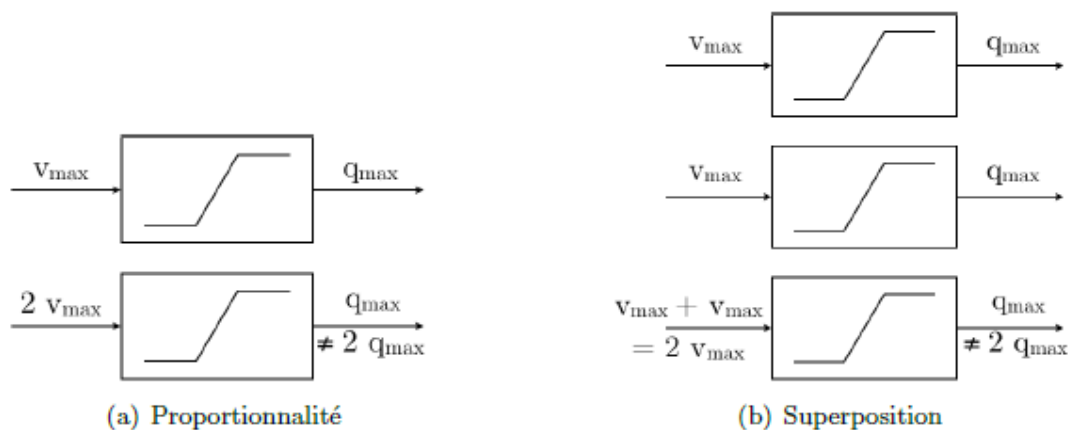
$$\boxed{q_{max} \simeq 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \simeq 240 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}}$$



Q21. D'après la figure, le comportement du bloc saturation doit être traduit par la fonction suivante.

```
def saturation(v):
    """Renvoie la valeur du débit q en sortie de servovalve saturée à partir d'une
    valeur de tension de commande v """
    if v <= - v_max :
        q = - q_max
    elif v >= v_max :
        q = q_max
    else :
        q = q_max / v_max * v
    return(q)
```

Q22. Ce système est non linéaire car il ne respecte pas le principe de proportionnalité (ni celui de superposition).



Q23. On écrit directement en  $O_2$  :  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphérique}} = \begin{Bmatrix} X_{N1}^{O_2} \vec{x}_N + Y_{N1}^{O_2} \vec{y}_N + Z_{N1}^{O_2} \vec{z}_N \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_2}$  et on réduit

l'autre torseur :  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}} = \begin{Bmatrix} X_{N1}^{O_1} \vec{x}_N + Y_{N1}^{O_1} \vec{y}_N \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_1} = \begin{Bmatrix} X_{N1}^{O_1} \vec{x}_N + Y_{N1}^{O_1} \vec{y}_N \\ 2eY_{N1}^{O_1} \vec{x}_N - 2eX_{N1}^{O_1} \vec{y}_N \end{Bmatrix}_{O_2}$ .

Q24. Les liaisons étant en parallèle, les actions mécaniques transmises par les liaisons se somment.

Ainsi :  $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}} + \{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphérique}} = \{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{pivot}}$ .

Q25. La relation précédente s'écrit alors en  $O_2$  :

$$\begin{Bmatrix} -2F_h \vec{x}_N + M_q \vec{y}_N \\ eM_q g \vec{x}_N + 2(d+e)F_h \vec{y}_N \end{Bmatrix}_{O_2} = \begin{Bmatrix} X_{N1}^{O_1} \vec{x}_N + Y_{N1}^{O_1} \vec{y}_N \\ 2eY_{N1}^{O_1} \vec{x}_N - 2eX_{N1}^{O_1} \vec{y}_N \end{Bmatrix}_{O_2} + \begin{Bmatrix} X_{N1}^{O_2} \vec{x}_N + Y_{N1}^{O_2} \vec{y}_N + Z_{N1}^{O_2} \vec{z}_N \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_2}$$

En identifiant les moments, on obtient :  $Y_{N1}^{O_1} = \frac{1}{2}M_q g$  et  $X_{N1}^{O_1} = -\frac{e+d}{e}F_h$ . D'où le torseur en  $O_1$  :

$$\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}} = \begin{Bmatrix} -\frac{e+d}{e}F_h \vec{x}_N + \frac{M_q g}{2} \vec{y}_N \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_1}$$

**Q26.**

— Si  $\vec{F}$  est colinéaire à  $\vec{x}_N$ , on a :  $|F_x| = \|\vec{F}\| = \frac{e+d}{e} F_h \simeq 245 \text{ kN}$ .

— Si  $\vec{F}$  est colinéaire à  $\vec{y}_N$ , on a :  $|F_y| = \|\vec{F}\| = \frac{M_q g}{2} \simeq 20 \text{ kN}$ .

— Si  $\vec{F}$  est de direction quelconque, on a :  $\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\frac{e+d}{e} F_h\right)^2 + \frac{(M_q g)^2}{4}} \simeq 246 \text{ kN}$ .

**Q27.** Avec la répartition de pression choisie et la représentation de la figure 14, on trouve :

$$\vec{F} = - \int p_{12} dS \vec{n}_{12} = -p_{12} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{L_c} dz \frac{d_c}{2} d\alpha (\cos\alpha \vec{x}_N + \sin\alpha \vec{y}_N) = -2p_{12} \frac{d_c}{2} L_c \vec{x}_N$$

d'où  $\vec{F} = -p_{12} d_c L_c \vec{x}_N$ . On note que  $d_c L_c$  est la surface projetée! C'est logique : au niveau local, on sent bien que les composantes sur  $\vec{y}_N$  des efforts élémentaires se compensent 2 à 2.

**Q28.** La pression exercée sur le coussinet dans la configuration de la figure 14 est :

$p_{12} = \frac{|F_x|}{d_c L_c} \simeq 61,5 \text{ N/mm}^2 < 80 \text{ N/mm}^2$ . Dans le cas général, on a :  $p_{12} = \frac{\|\vec{F}\|}{d_c L_c} \simeq 61,7 \text{ N/mm}^2$ , toujours inférieure à  $p_{adm}$ . Le coussinet est donc valide.

## Exercice : Suspension de voiture

### Objectif :

L'objectif de cette étude est l'analyse des sollicitations dans le train avant d'un véhicule lors d'une phase de freinage en virage.

### Notations :

Le torseur d'action de la pièce  $i$  sur la pièce  $j$  au point  $A$ , dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , sera noté de la manière suivante :

$$\{i \rightarrow j\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{i \rightarrow j} = X_{ij}\vec{x} + Y_{ij}\vec{y} + Z_{ij}\vec{z} \\ \vec{M}_{/A} i \rightarrow j = L_{ij}\vec{x} + M_{ij}\vec{y} + N_{ij}\vec{z} \end{array} \right\}_A$$



### Modélisation, hypothèses

- La cinématique du train avant est définie schématiquement par les figures 1 et 2 des annexes a et b. Le mécanisme comporte les pièces suivantes :
  - le châssis du véhicule, repéré **(0)** ;
  - le triangle supérieur **(1)** ;
  - la fusée **(2)** assurant le guidage de la roue au moyen d'une liaison pivot sur roulements. **Dans l'étude proposée, les freins sont considérés bloqués, c'est-à-dire que la liaison pivot entre la roue et la fusée (2) est bloquée** (= encastrement : même sous-ensemble cinématique **(2)**) ;
  - le levier de suspension **(3)** ;
  - le bras de suspension **(4)**.

- Un combiné ressort-amortisseur (**r**), visible sur l'illustration 3D mais non représenté sur les schémas des figures (1) et (2), assure la suspension du véhicule et l'amortissement de ses oscillations. Son action est

**inconnue**, modélisée par le glisseur suivant :  $\{r \rightarrow 3\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{r \rightarrow 3} = -F_r \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$

- Le pivotement de l'ensemble {fusée, roue} pour assurer la fonction de direction est réalisé par une biellette de direction (**d**), visible sur l'illustration 3D mais non représentée sur les schémas des figures (1) et (2).

Son action est **inconnue**, modélisée par le glisseur suivant :  $\{d \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{d \rightarrow 2} = F_d \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_T$

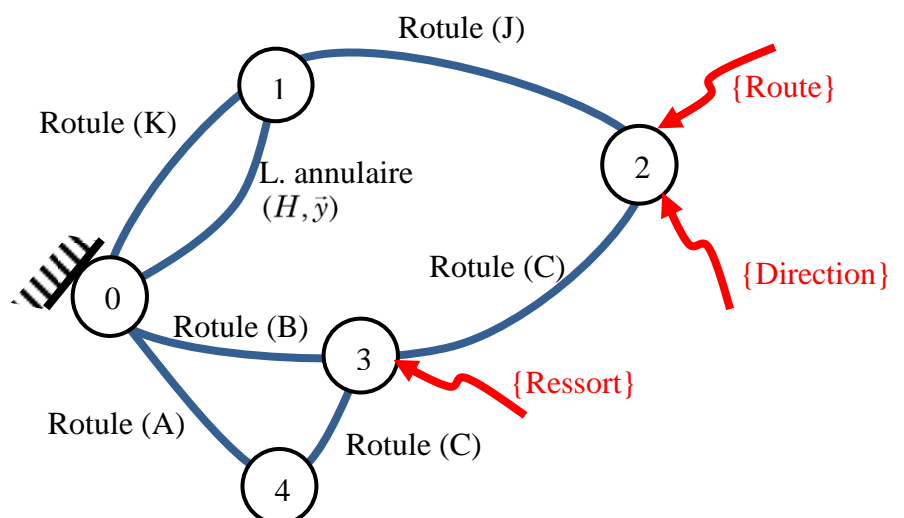
- Les actions du sol sur la roue (2) sont **connues**, modélisées par le glisseur suivant :

$$\{Sol \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{sol \rightarrow 2} = F_{Ix}\vec{x} + F_{Iy}\vec{y} + F_{Iz}\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

- Le paramétrage géométrique et la modélisation des efforts extérieurs sont très simplifiés pour permettre une étude « à la main ». Cependant, les conclusions gardent un caractère général.

La phase étudiée suppose qu'il n'existe aucun mouvement, ni du train avant (suspension), ni de la direction.

Le graphe de structure où sont modélisées les actions mécaniques extérieures est donné ci-contre :



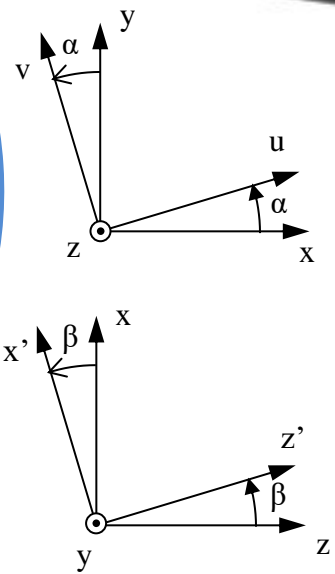
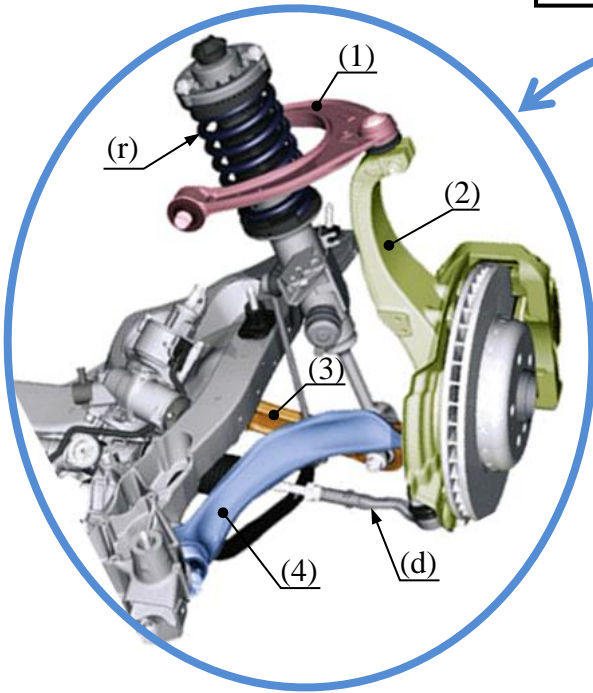
## Étude statique

L'objectif de cette partie est double :

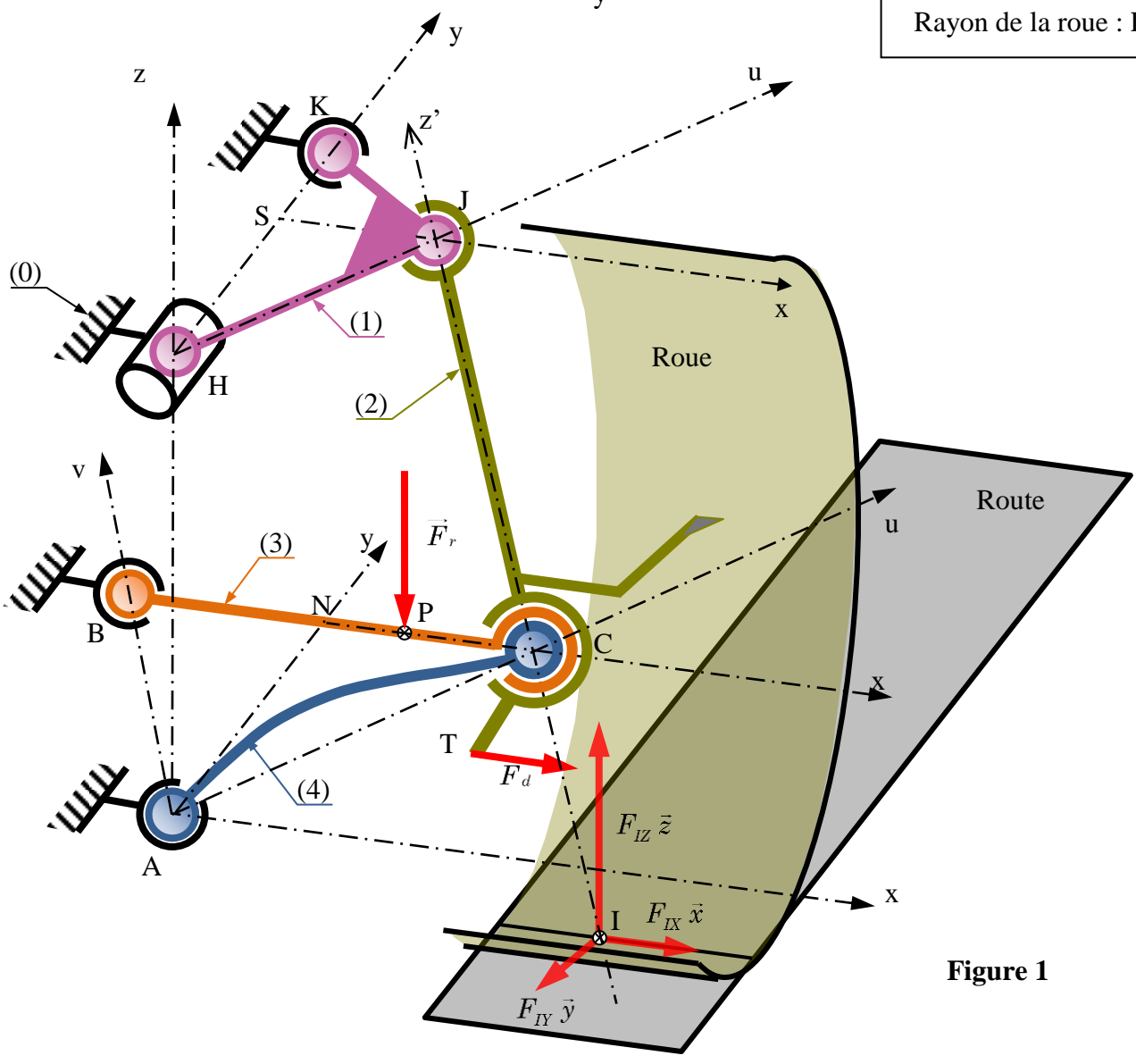
- déterminer les actions dans les liaisons du train avant, autres que les liaisons avec le châssis (**0**) ;
- déterminer les actions du combiné ressort amortisseur (**r**), et de la bielle de direction (**d**).

- Q1 - Isoler le bras de suspension (4), et en déduire l'équation utile à la réalisation de l'objectif fixé en introduction de l'étude statique.**
- Q2 - Isoler le levier de suspension (3), et en déduire les deux équations utiles à la réalisation de l'objectif fixé en introduction de l'étude statique.**
- Q3 - Isoler le triangle (1), et en déduire l'équation utile à la réalisation de l'objectif fixé en introduction de l'étude statique.**
- Q4 - Isoler et étudier statiquement l'ensemble fusée-roue (2). Déterminer, en privilégiant dans les calculs le point C, toutes les inconnues des liaisons relatives à cette pièce, ainsi que l'action de la biellette de direction (**d**) en fonction de  $F_{Ix}$ ,  $F_{Iy}$ ,  $F_{Iz}$  et des données géométriques. En déduire également l'action du combiné ressort-amortisseur ( $F_r$ ).**
- Q5 - À partir d'une analyse géométrique du train avant, commenter le résultat de l'effort de la biellette de direction (**d**) sur la fusée (2). Commenter l'intérêt pratique de ce résultat et estimer les causes d'écarts possibles par rapport à la réalité.**

**ANNEXE a**

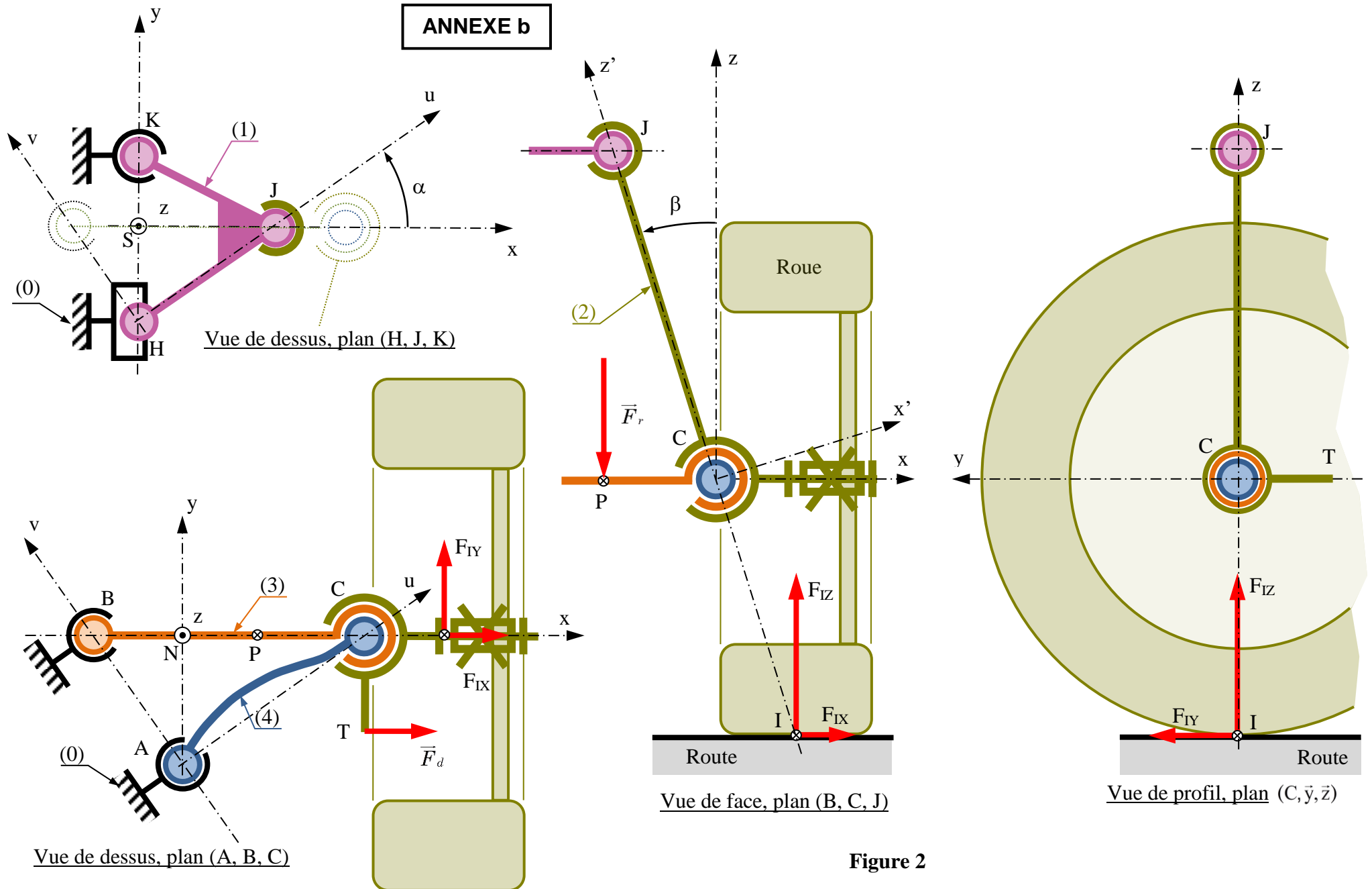


- $\overline{AC} = L_4 \vec{u}$
- $\overline{BC} = L_3 \vec{x}$
- $\overline{BP} = d_3 \vec{x}$
- $\overline{SJ} = L_1 \vec{x}$
- $\overline{HJ} = a_1 \vec{u}$
- $\overline{HK} = b_1 \vec{y}$
- $\overline{CJ} = L_2 \vec{z}'$
- $\overline{TC} = d_2 \vec{y}$
- $(\vec{x}, \vec{u}) = (\vec{y}, \vec{v}) = \alpha$
- $(\vec{z}, \vec{z}') = (\vec{x}, \vec{x}') = \beta$
- Rayon de la roue : R



**Figure 1**

**ANNEXE b**



**Figure 2**

## Corrigé

**Q1-** Le bras de suspension (4) est en **équilibre sous deux actions de types glisseurs** : rotules en A avec (0) et en C avec (3). Ces glisseurs sont directement opposés, portés par la droite (A, C) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{A04} = F_{A04} \vec{u} \\ \vec{F}_{C34} = F_{C34} \vec{u} \end{array} \right. \quad \text{Équation de la résultante en projection sur } \vec{u} : \quad \boxed{F_{A04} + F_{C34} = 0}$$

**Q2-** Le levier de suspension (3) est en équilibre sous quatre actions de types glisseurs (BAME) :

- rotule en B avec (0),
- rotule en C avec (4),
- rotule en C avec (2), et
- action du ressort.

Si on considère la somme des deux actions dans les rotules en C, l'équilibre est réalisé sous l'effet de 3 actions modélisées par des glisseurs.

Ils sont donc coplanaires et concourants ; puisque l'action du ressort est supposée verticale, les trois efforts sont donc dans le plan vertical  $(B, \vec{z}, \vec{x})$  contenant les points B, C et P :

$$\text{Notations : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{B03} = X_{03} \vec{x} + Z_{03} \vec{z} \\ \vec{F}_{C23} = X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} + Z_{23} \vec{z} \\ \vec{F}_{C43} = -F_{C34} \vec{u} \\ \vec{F}_r = -F_r \vec{z} \end{array} \right.$$

Équation du moment en B, en projection sur  $\vec{y}$  :  $(\overline{BC} \wedge \vec{F}_{C23} + \overline{BC} \wedge \vec{F}_{C43} + \overline{BP} \wedge \vec{F}_r) \cdot \vec{y} = 0$

$$(\overline{L_3} \vec{x} \wedge [X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} + Z_{23} \vec{z}] + \overline{L_3} \vec{x} \wedge -F_{C34} \vec{u} + \overline{d_3} \vec{x} \wedge -F_r \vec{z}) \cdot \vec{y} = 0 \rightarrow \boxed{-Z_{23} L_3 + F_r d_3 = 0} \quad (1)$$

Équation du moment en B, en projection sur  $\vec{z}$  :  $(\overline{BC} \wedge \vec{F}_{C23} + \overline{BC} \wedge \vec{F}_{C43} + \overline{BP} \wedge \vec{F}_r) \cdot \vec{z} = 0$

$$(\overline{L_3} \vec{x} \wedge [X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} + Z_{23} \vec{z}] + \overline{L_3} \vec{x} \wedge -F_{C34} \vec{u} + \overline{d_3} \vec{x} \wedge -F_r \vec{z}) \cdot \vec{z} = 0 \rightarrow \boxed{(Y_{23} - F_{C34} \sin \alpha) L_3 = 0} \quad (2)$$

**Q3-** On isole (1). L'action dans la rotule en J avec (2) est modélisée par un glisseur :  $\vec{F}_{J21} = X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z}$

Le système est donc en équilibre sous l'action de 3 glisseurs en H, K et J qui sont donc coplanaires (plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ ) et concourants.  $\rightarrow \boxed{Z_{21} = 0} \quad (4)$

**Q4-** La fusée (2) est soumise à quatre actions (BAME) :  $(3 \rightarrow 2)_C$ ,  $(1 \rightarrow 2)_J$ ,  $(d \rightarrow 2)_T$  et  $(\text{Sol} \rightarrow 2)_I$

$$\text{Équations de la résultante en projection sur } \vec{x}, \vec{y} \text{ et } \vec{z} : \left\{ \begin{array}{l} -X_{23} - X_{21} + F_d + F_{IX} = 0 \quad (5) \\ -Y_{23} - Y_{21} + F_{IY} = 0 \quad (6) \\ -Z_{23} + F_{IZ} = 0 \quad (7) \end{array} \right.$$

Équations du moment en C, en projection sur  $\vec{x}'$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}'$  :

$$\vec{0} + \overline{CJ} \wedge \vec{F}_{J21} + \overline{CT} \wedge \vec{F}_d + \overline{CI} \wedge \vec{F}_I = \vec{0}$$

$$L_2 \vec{z}' \wedge (X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y}) - d_2 \vec{y} \wedge F_d \vec{x} - \frac{R}{\cos \beta} \vec{z}' \wedge (F_{IX} \vec{x} + F_{IY} \vec{y} + F_{IZ} \vec{z}) = \vec{0}$$

$$L_2 (X_{21} \cos \beta \vec{y} + Y_{21} \vec{x}') + d_2 F_d (-\sin \beta \vec{x}' + \cos \beta \vec{z}') - \frac{R}{\cos \beta} (F_{IX} \cos \beta \vec{y} + F_{IY} \vec{x}' - F_{IZ} \sin \beta \vec{y}) = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 Y_{21} - d_2 \sin \beta F_d - \frac{R}{\cos \beta} F_{IY} = 0 \quad (8) \\ L_2 X_{21} \cos \beta - R(F_{IX} - F_{IZ} \tan \beta) = 0 \quad (9) \\ d_2 \cos \beta F_d = 0 \quad (10) \end{array} \right.$$

Résultats :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_d = 0 \quad Z_{21} = 0 \\ Y_{21} = \frac{R}{L_2 \cos \beta} F_{IY} \\ X_{21} = \frac{R}{L_2 \cos \beta} (F_{IX} - F_{IZ} \tan \beta) \\ X_{23} = -\frac{R}{L_2 \cos \beta} (F_{IX} - F_{IZ} \tan \beta) + F_{IX} \\ Y_{23} = -\frac{R}{L_2 \cos \beta} F_{IY} + F_{IY} \\ Z_{23} = F_{IZ} \quad \text{et} \quad F_r = F_{IZ} \frac{L_3}{d_3} \end{array} \right.$$

**Q5-** L'équation (10) correspond au moment en C, en projection sur  $\vec{z}'$  :

$$\boxed{F_d \cdot d_2 = 0}$$

L'action de la biellette de direction est nulle... L'effort à exercer au niveau du volant est donc théoriquement nul. Cette propriété est due au fait que le « point de contact » de la roue sur la route se trouve sur l'axe de pivotement de la roue, matérialisé par la ligne des centres des deux rotules en C et J.

Dans la réalité, même en admettant que l'action de la route sur la roue est un glisseur, il ne s'applique pas au point I situé sur la droite (B, C). Il existe un déport de cet effort, qui se traduira par un effort  $F_d$  non nul.

Cet effort est généralement souhaitable pour améliorer la stabilité du véhicule en ligne droite.

Il existe également des composantes de moment dans l'action du sol sur la roue, du fait de l'étendue (surface) non négligeable du contact (environ 200 à 300 cm<sup>2</sup> selon le poids du véhicule). Ces composantes constituent la résistance au pivotement et la résistance au roulement.