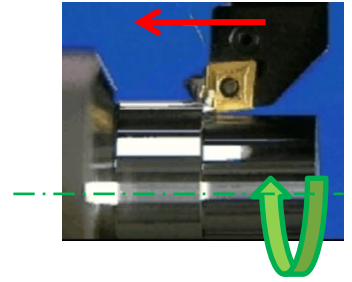


## Exercice :

La figure ci-dessous représente une cellule de mesure utilisée pour évaluer les efforts de coupe dans une opération de tournage. Ce procédé d'obtention d'une pièce se réalise en **translatant** un outil (noir avec sa plaquette dorée sur photo ci-contre) par rapport à la pièce **tournante autour de son axe propre** (couleur chrome sur photo ci-contre). On réduit ainsi le diamètre de la pièce.



La cellule de mesure est constituée d'un support d'outil (2), mis en position dans le bâti (1) du tour par trois liaisons :

- Une rotule de centre A tel que  $\overrightarrow{OA} = a \vec{x}$
- Une linéaire annulaire de centre B tel que  $\overrightarrow{OB} = d \vec{x} + b \vec{z}$ , de direction  $\vec{x}$  ;
- Une ponctuelle de centre C tel que  $\overrightarrow{OC} = d \vec{x} + c \vec{y}$ , et de normale  $\vec{y}$ .

Des capteurs placés en A, B et C permettent de mesurer les différentes composantes des efforts de liaison. On se propose de vérifier que la mesure de ces composantes permet de déterminer complètement l'action de coupe inconnue en O, modélisée par le torseur :

$$\{T(\text{coupe} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} + Z_O \vec{z} \\ L_O \vec{x} + M_O \vec{y} + N_O \vec{z} \end{array} \right\}_O \text{ c'est l'action de la pièce au niveau de la pointe de l'outil}$$

- On suppose:
- que le corps (2) est indéformable;
  - que l'action de la pesanteur est représentable par un glisseur vertical de norme connue égale à  $M.g$ , coupant le plan  $(0 ; \vec{x}, \vec{z})$  en un point H (CDG de (2)) tel que :  $\overrightarrow{OH} = h \vec{x} + f \vec{z}$
  - que le repère  $(D ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au bâti est galiléen.

1) Isoler le corps(2) et écrire le système de 6 équations issu de l'application du P.F.S en réduisant les torseurs en O

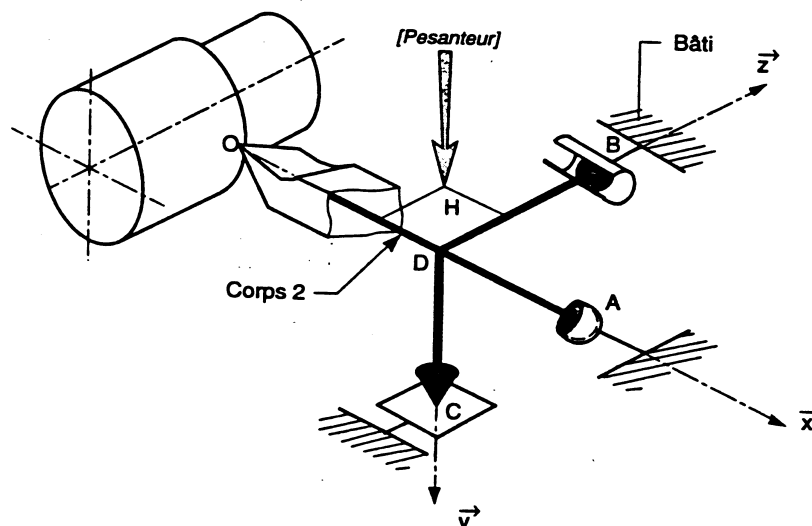
2) En déduire qu'il est possible de déterminer les actions de coupe en fonction des actions dans les liaisons

3) Application numérique : on suppose connues les actions de liaison (mesurées par capteurs), définies par:

$$\begin{array}{lll} X_A = -120 \text{ N} & Y_A = 550 \text{ N} & Z_A = 204 \text{ N} \\ Y_B = 0 \text{ N} & Z_B = -489 \text{ N} & Y_C = -1320 \text{ N} \\ a = 120 \text{ mm} & b = 40 \text{ mm} & d = 50 \text{ mm} \end{array}$$

Le poids  $Mg$  est supposé négligeable devant les autres efforts.

Calculer numériquement les efforts de coupe au point O. Concluez.



## Corrigé

Q1 :

- Isolons le porte-outil Z :

Bilan des actions extérieures :

$$\bullet \text{ en } O : \text{ la coupe : } \mathcal{T}(\text{coupe} \rightarrow Z) = \begin{Bmatrix} X_0 & L_0 \\ Y_0 & M_0 \\ Z_0 & N_0 \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \text{ en } H : \text{ action du pesanteur : } \vec{P}' = \Gamma \vec{y} = \begin{Bmatrix} 0 & -f\Gamma y \\ \Gamma y & 0 \\ 0 & h\Gamma y \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \text{ en } A : \text{ Liaison rotule : } \mathcal{T}(\text{rotule}) = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & -aZ_A \\ 0 & Z_A + aY_A \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \text{ en } B : \text{ Liaison annulaire : } \mathcal{T}(\text{lin. an}) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -bY_B \\ Y_B & -dZ_B \\ 0 & Z_B + dY_B \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \text{ en } C : \text{ ponctuelle } \mathcal{T}(\text{point}) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & dY_C \end{Bmatrix}$$

Ecrivons le PFS au point O :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 + X_A = 0 \quad (1) \\ Y_0 + \Gamma y + Y_A + Y_B + Y_C = 0 \quad (2) \\ Z_0 + Z_A + Z_B = 0 \quad (3) \\ L_0 - f\Gamma y - bY_B = 0 \quad (4) \\ M_0 - aZ_A - dZ_B = 0 \quad (5) \\ N_0 + h\Gamma y + aY_A + dY_B + dY_C = 0 \quad (6) \end{array} \right.$$

si  $\Gamma$  connue (vérif,  
alors on a un syst  
de 6 eq. à 6 inc.

Q3 :

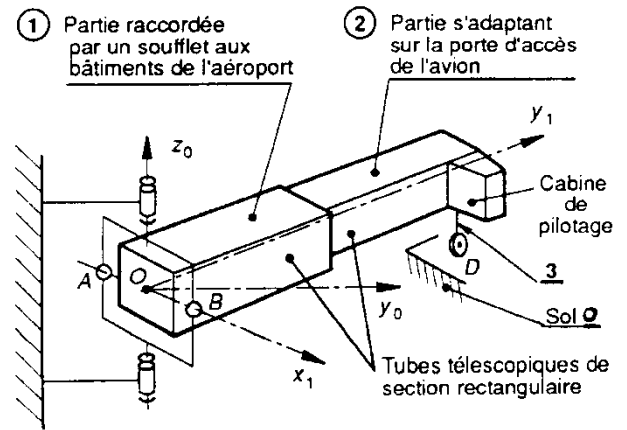
$$X_0 = -X_A = 120 \text{ N} \quad Y_0 = -Y_A - Y_B - Y_C = 770 \text{ N} \quad Z_0 = -Z_A - Z_B = 285 \text{ N}$$

$$L_0 = fMg + bY_B = 0 \text{ Nm} \quad M_0 = aZ_A + dZ_B = 0.03 \text{ Nm} \quad N_0 = hMg - aY_A - dY_B - dY_C = 67.2 \text{ Nm}$$

**Exercice :**

Dans les aéroports modernes, des couloirs télescopiques réunissent les halls d'embarquement à la porte de l'avion. Les passagers sont ainsi à l'abri des intempéries.

L'extrémité raccordée aux bâtiments est soutenue par une articulation comparable à un Cardan. L'extrémité s'adaptant à l'avion peut se déplacer dans toutes les directions afin de pouvoir atteindre la porte de l'avion. Pour cela, une roue motrice orientable autour d'un axe vertical 3 repose sur le sol horizontal et permet des déplacements horizontaux. La hauteur est réglable en fonction de la position de la porte de l'avion par rapport au sol.



Croquis du couloir télescopique

Dans un objectif de dimensionnement des liaisons particulièrement sollicitées, on propose de réaliser une étude statique. Elle permettra de connaître les différents torseurs des liaisons du couloir télescopique avec le bâtiment et le sol.

Dans toute l'étude on ne considérera que le cas où le couloir est horizontal.

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est un repère lié aux bâtiments 5 de l'aéroport.

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est un repère mobile lié au couloir 1.

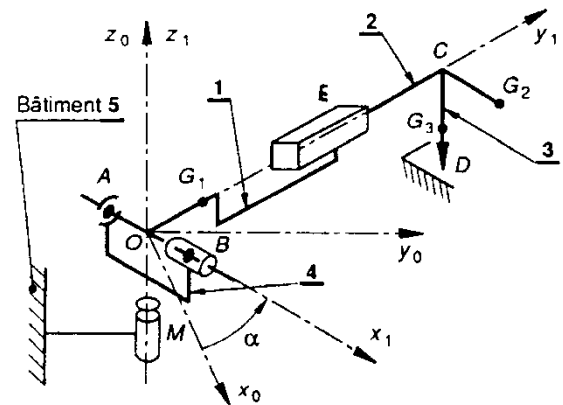
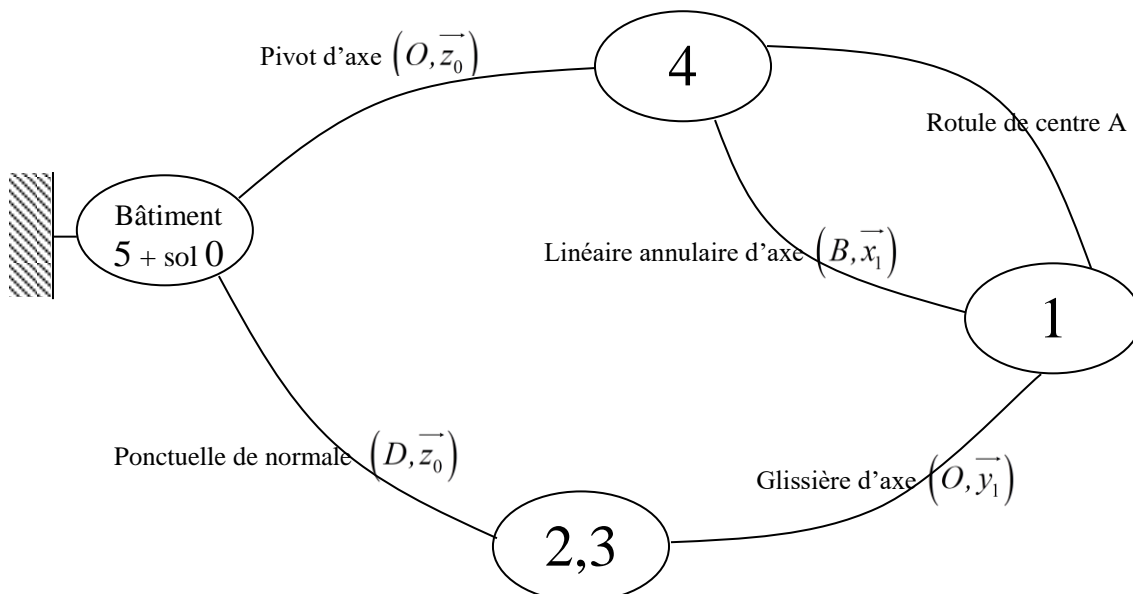


Schéma cinématique du couloir télescopique

Ces repères sont tels que  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ ,  $(O, \vec{y}_1)$  porté par l'axe du couloir 1 et  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$ .

On donne le graphe des liaisons du couloir télescopique :



Remarque : les solides 2 et 3 sont considérés comme étant dans la même classe d'équivalence puis que le couloir, pour notre étude, reste horizontal.

Le système est constitué de 3 solides principaux représentés schématiquement ci-dessus.

- **1** de poids  $P_1$ , de centre de gravité  $G_1$ , tel que  $\overrightarrow{OG_1} = 4 \vec{y}_1$  est articulé sur une potence 4, elle-même en rotation par rapport aux bâtiments suivant l'axe vertical en  $M$ .

On donne:

$$\overrightarrow{OA} = -1,5 \vec{x}_1 ; \quad \overrightarrow{OB} = 1,5 \vec{x}_1 ; \quad \overrightarrow{OM} = m \vec{z}_0 ; \quad \|P_1\| = 10^5 \cdot N$$

- **2** de poids,  $P_2$ , de centre de gravité  $G_2$  tel que:

$$\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG_2} ; \quad \overrightarrow{OC} = 16 \vec{y}_1 ; \quad \overrightarrow{CG_2} = 1 \vec{x}_1 ; \quad \|P_2\| = 15 \cdot 10^4 \cdot N$$

$$\overrightarrow{OE} = 8 \vec{y}_1$$

- **3** de poids  $P_3$ , de centre de gravité  $G_3$  assure le déplacement de 2 dans un plan horizontal. Le contact entre la roue motrice et le sol est modélisé par un appui ponctuel de normale verticale. On note:

$$\overrightarrow{DC} = 4 \vec{z}_0 \quad \overrightarrow{DG_3} = 1 \vec{z}_0 = \quad \|P_3\| = 10^4 \cdot N$$

- **4** est sans masse.

NB: Les longueurs sont en mètres et les liaisons décrites sont considérées sans frottement.

On cherche à exprimer les éléments de réduction des torseurs des actions mécaniques transmises par les liaisons en A, B, D et E (pour la glissière).

Q1/ ajouter sur le graphe de liaisons l'action de la pesanteur sur les différentes pièces

$$Q2/ \left\{ \tau_{5 \rightarrow 4} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{54} & L_{54} \\ Y_{54} & M_{54} \\ Z_{54} & N_{54} \end{array} \right\}_{O, \vec{x}_1, \vec{z}_0} \quad \text{est le torseur d'actions mécaniques du bâtiment 5 sur 4.}$$

Dans quelle base est-il judicieux de l'exprimer pour la suite du calcul ?

Exprimer ce torseur en tenant compte des propriétés de la liaison entre 4 et 5.

$$Q3/ \left\{ \tau_{23 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{231} & L_{231} \\ Y_{231} & M_{231} \\ Z_{231} & N_{231} \end{array} \right\}_{D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0} \quad \text{est le torseur d'actions mécaniques de 2,3 sur 1.}$$

Exprimer ce torseur en tenant compte des propriétés de la liaison entre 2,3 et 1.

$$Q4/ \left\{ \tau_{5 \rightarrow 23} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{523} & L_{523} \\ Y_{523} & M_{523} \\ Z_{523} & N_{523} \end{array} \right\}_{D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0} \quad \text{est le torseur d'actions mécaniques du bâtiment 5 sur 2,3.}$$

Exprimer ce torseur en tenant compte des propriétés de la liaison entre 5 et 2,3.

Q5/ Isoler {1,2,3,4}. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à ce système.

Q6/ Exprimer les 6 équations déduites de l'application du PFS à ce système en réduisant les torseurs en O.

Q7/ Isoler {2,3}. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à ce système.

Q8/ Exprimer les 6 équations déduites de l'application du PFS à ce système en réduisant les torseurs en O.

$$Q9/\{\tau_{1 \rightarrow 4}(la)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{14la} & L_{14la} \\ Y_{14la} & M_{14la} \\ Z_{14la} & N_{14la} \end{matrix} \right\}_{B, \vec{x}_1, \dots}$$

est le torseur d'actions mécaniques transmises par la liaison linéaire

annulaire de 1 sur 4.

Exprimer ce torseur en tenant compte des propriétés de cette liaison.

$$Q10/\{\tau_{1 \rightarrow 4}(r)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{14r} & L_{14r} \\ Y_{14r} & M_{14r} \\ Z_{14r} & N_{14r} \end{matrix} \right\}_{A, \dots}$$

est le torseur d'actions mécaniques transmises par la liaison rotule de

1 sur 4.

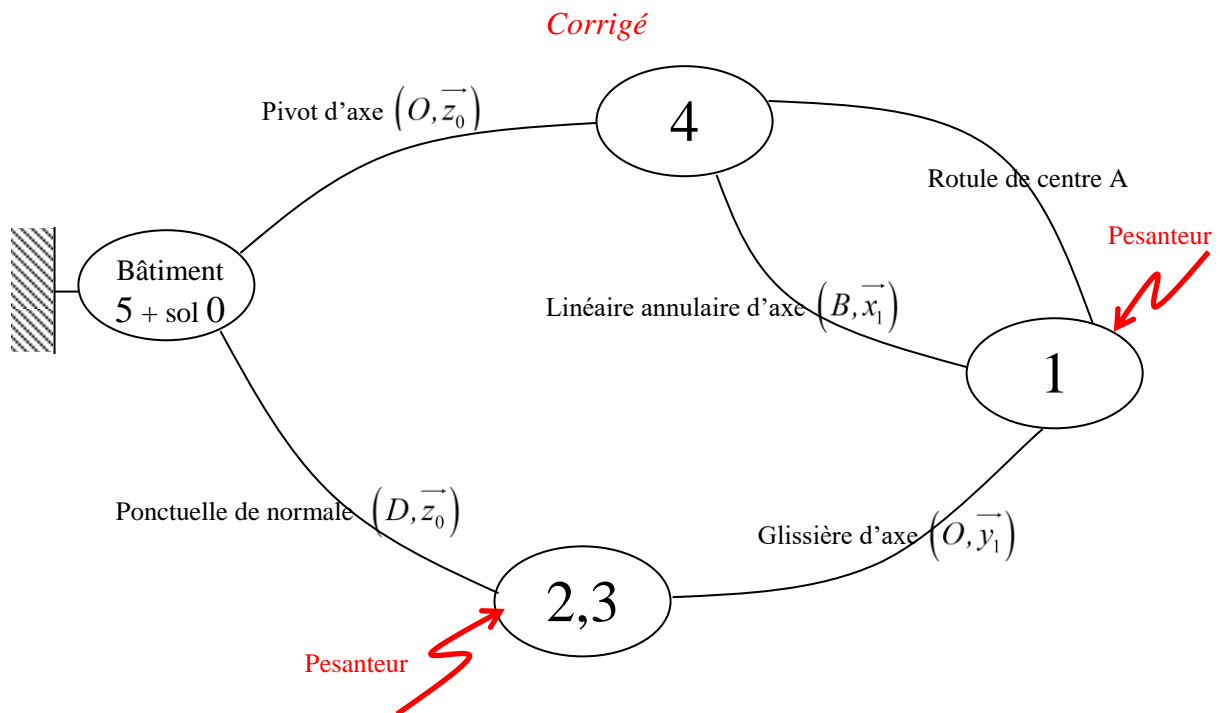
Exprimer ce torseur en tenant compte des propriétés de cette liaison.

Q11/ Isoler {4}. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures à ce système.

Q12/ Exprimer les 6 équations déduites de l'application du PFS à ce système en réduisant les torseurs en O.

Q13/ En déduire l'expression définitive des torseurs d'actions mécaniques  $\{\tau_{5 \rightarrow 4}\}, \{\tau_{23 \rightarrow 1}\}, \{\tau_{5 \rightarrow 23}\}, \{\tau_{1 \rightarrow 4}(la)\}$  et  $\{\tau_{1 \rightarrow 4}(r)\}$  en fonction des différents poids  $P_i$ .

Q1/



Q2/  $\{\tau_{5 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{54} & L_{54} \\ Y_{54} & M_{54} \\ Z_{54} & N_{54} \end{array} \right\}_{O, \vec{x}_0, \vec{z}_0}$ . Il est judicieux de l'exprimer dans la base  $R_1$  puisque les autres actions mécaniques agissant sur 4 sont dans cette base.

Et puisqu'il s'agit d'une liaison pivot d'axe  $\vec{z}_0$ , alors  $\{\tau_{5 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{54} & L_{54} \\ Y_{54} & M_{54} \\ Z_{54} & 0 \end{array} \right\}_{O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0}$  La forme est la même que le torseur soit exprimé dans la base  $R_0$  ou dans la base  $R_1$ .

Q3/ liaison glissière de direction  $(O, \vec{y}_1)$  :  $\{\tau_{23 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{231} & L_{231} \\ 0 & M_{231} \\ Z_{231} & N_{231} \end{array} \right\}_{D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0}$  Cette forme n'est valable que dans la base  $R_1$ .

Q4/ liaison ponctuelle de normale  $(D, \vec{z}_0)$  :  $\{\tau_{5 \rightarrow 23}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{523} & 0 \end{array} \right\}_{D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0}$

Q5/ BAME sur  $\{1, 2, 3, 4\}$  : action de 5 sur 4, action de 5 sur 2,3, gravité sur 1, gravité sur 2 et 3.

Q6/ pour l'action de 5 sur 4 :  $\{\tau_{5 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{54} & L_{54} \\ Y_{54} & M_{54} \\ Z_{54} & 0 \end{array} \right\}_{O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0}$  écrit en O donc pas de changement de point à faire

Pour l'action de 5 sur 2,3  $\vec{M}_0 = \vec{M}_D + \vec{OD} \wedge \vec{R}$  ;  $\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0+ & 16 \wedge & 0 \\ 0 & -4 & Z_{523} \end{array} = \begin{array}{c} 16.Z_{523} \\ 0 \\ 0 \end{array}$  c'est Babar pour passer du point D au point O

$$\{\tau_{5 \rightarrow 23}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{523} & 0 \end{array} \right\}_{D, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 16.Z_{523} \\ 0 & 0 \\ Z_{523} & 0 \end{array} \right\}_{O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0}$$

Pour l'action de la gravité sur 1 :  $\{\tau_{gravité \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \end{array} \right\}_{G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0}$  et  $\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0+ & 4 \wedge & 0 \\ 0 & 0 & -P_1 \end{array} = \begin{array}{c} -4.P_1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$  c'est Babar pour passer du point  $G_1$  au point O

$$\{\tau_{gravité \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \end{array} \right\}_{G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -4.P_1 \\ 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \end{array} \right\}_{O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0}$$

$$\text{Pour l'action de la gravité sur 2 : } \left\{ \tau_{\text{gravité} \rightarrow 2} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_2 & 0 \end{array} \right\}_{G_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ 0+ & 16 \wedge & 0 \\ 0 & 0 & -P_2 \end{array} \right| = \begin{array}{c} -16.P_2 \\ P_2 \\ 0 \end{array} \quad \text{c'est Babar}$$

pour passer du point  $G_2$  au point  $O$

$$\left\{ \tau_{\text{gravité} \rightarrow 2} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_2 & 0 \end{array} \right\}_{G_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -16.P_2 \\ 0 & P_2 \\ -P_2 & 0 \end{array} \right\}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

$$\text{Pour l'action de la gravité sur 3 : } \left\{ \tau_{\text{gravité} \rightarrow 3} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_3 & 0 \end{array} \right\}_{G_3, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0+ & 16 \wedge & 0 \\ 0 & -3 & -P_3 \end{array} \right| = \begin{array}{c} -16.P_3 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad \text{c'est Babar}$$

pour passer du point  $G_3$  au point  $O$

$$\left\{ \tau_{\text{gravité} \rightarrow 3} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_3 & 0 \end{array} \right\}_{G_3, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -16.P_3 \\ 0 & 0 \\ -P_3 & 0 \end{array} \right\}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

Voilà donc le système de 6 équations déduites de l'application du PFS au système  $\{1,2,3,4\}$  en  $O$ .

$$\text{TRS} \left| \begin{array}{l} X_{54} + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ Y_{54} + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ Z_{54} + Z_{523} - P_1 - P_2 - P_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{TMS en } O \left| \begin{array}{l} L_{54} + 16.Z_{523} - 4.P_1 - 16.P_2 - 16.P_3 = 0 \\ M_{54} + 0 + 0 + P_2 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

Q7/ BAME sur  $\{2,3\}$  : *action de 5 sur 2,3, action de 1 sur 2,3, gravité sur 2 et 3.*

$$\text{Q8/ Pour l'action de 5 sur 2,3 } \left\{ \tau_{5 \rightarrow 23} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 16.Z_{523} \\ 0 & 0 \\ Z_{523} & 0 \end{array} \right\}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

$$\text{Pour l'action de 1 sur 2,3 } \left\{ \tau_{23 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{231} & L_{231} \\ 0 & M_{231} \\ Z_{231} & N_{231} \end{array} \right\}_{D, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{c|c|c} L_{231} & 0 & X_{231} \\ M_{231} + & 16 \wedge & 0 \\ N_{231} & -4 & Z_{231} \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{c} L_{231} + 16.Z_{231} \\ M_{231} + 4.X_{231} \\ N_{231} - 16.X_{231} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \tau_{23 \rightarrow 1} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{231} & L_{231} + 16.Z_{231} \\ 0 & M_{231} + 4.X_{231} \\ Z_{231} & N_{231} - 16.X_{231} \end{array} \right\}_{D, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \quad \text{c'est l'action réciproque (torseur opposé) dont il faut tenir compte}$$

dans le BAME

$$\text{Pour l'action de la gravité sur } 2 \left\{ \tau_{\text{gravité} \rightarrow 2} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -16.P_2 \\ 0 & P_2 \\ -P_2 & 0 \end{array} \right\}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

$$\text{Pour l'action de la gravité sur } 3 \left\{ \tau_{\text{gravité} \rightarrow 3} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -16.P_3 \\ 0 & 0 \\ -P_3 & 0 \end{array} \right\}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

Voilà donc le système de 6 équations déduites de l'application du PFS à  $\{2,3\}$  en  $O$ .

$$\text{TRS} \left\{ \begin{array}{l} 0 - X_{231} + 0 + 0 = 0 \\ 0 - 0 + 0 + 0 = 0 \\ Z_{523} - Z_{231} - P_2 - P_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{TMS en } O \left\{ \begin{array}{l} 16.Z_{523} - L_{231} - 16.Z_{231} - 16.P_2 - 16.P_3 = 0 \\ 0 - M_{231} - 4.X_{231} + P_2 + 0 = 0 \\ 0 - N_{231} + 16.X_{231} + 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Q9/ liaison linéaire annulaire d'axe } (O, \bar{x}_1) : \left\{ \tau_{1 \rightarrow 4}(la) \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{14la} & 0 \\ Z_{14la} & 0 \end{array} \right\}_{B, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

$$\text{Q10/ liaison rotule de centre } A : \left\{ \tau_{1 \rightarrow 4}(r) \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{14r} & 0 \\ Y_{14r} & 0 \\ Z_{14r} & 0 \end{array} \right\}_{A, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

Q11/ BAME sur  $\{4\}$  : action de 5 sur 4, de 1 sur 4 par la linéaire annulaire, de 1 sur 4 par la rotule.

$$\text{Q12/ pour l'action de 5 sur 4 : } \left\{ \tau_{5 \rightarrow 4} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{54} & L_{54} \\ Y_{54} & M_{54} \\ Z_{54} & 0 \end{array} \right\}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

$$\text{Pour l'action de 1 sur 4 par la linéaire annulaire : } \left\{ \tau_{1 \rightarrow 4}(la) \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{14la} & 0 \\ Z_{14la} & 0 \end{array} \right\}_{B, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \quad \text{et}$$

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0+ & 0 & Y_{14la} & -1,5.Z_{14la} \\ 0 & 0 & Z_{14la} & 1,5.Y_{14la} \end{array} \right| \quad \text{donc } \left\{ \tau_{1 \rightarrow 4}(la) \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{14la} & -1,5.Z_{14la} \\ Z_{14la} & 1,5.Y_{14la} \end{array} \right\}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

$$\text{Pour l'action de 1 sur 4 par la rotule : } \left\{ \tau_{1 \rightarrow 4}(r) \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{14r} & 0 \\ Y_{14r} & 0 \\ Z_{14r} & 0 \end{array} \right\}_{A, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{c|c|c|c} 0 & -1,5 & X_{14r} & 0 \\ 0+ & 0 & Y_{14r} & 1,5.Z_{14r} \\ 0 & 0 & Z_{14r} & -1,5.Y_{14r} \end{array} \right| \quad \text{donc}$$

$$\left\{ \tau_{1 \rightarrow 4}(r) \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{14r} & 0 \\ Y_{14r} & 1,5.Z_{14r} \\ Z_{14r} & -1,5.Y_{14r} \end{array} \right\}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0}$$

Voilà donc le système de 6 équations déduites de l'application du PFS à  $\{4\}$  en  $O$ .

$$\begin{array}{l} TRS \\ \left\{ \begin{array}{l} X_{54} + 0 + X_{14r} = 0 \\ Y_{54} + Y_{14la} + Y_{14r} = 0 \\ Z_{54} + Z_{14la} + Z_{14r} = 0 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} TMS \text{ en } O \\ \left\{ \begin{array}{l} L_{54} + 0 + 0 = 0 \\ M_{54} - 1,5.Z_{14la} + 1,5.Z_{14r} = 0 \\ 0 + 1,5.Y_{14la} - 1,5.Y_{14r} = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Q13/ à partir des 18 équations déterminées :

$$X_{54} = 0, Y_{54} = 0, X_{14r} = 0, X_{231} = 0, N_{231} = 0, Y_{14r} = 0, Y_{14la} = 0, M_{54} = -P_2, L_{54} = 0, Z_{523} = 0, 25.P_1 + P_2 + P_3, Z_{231} = 0, 25.P_1, L_{231} = 0, M_{231} = P_2, Z_{54} = 0, 75.P_1, Z_{14la} = -P_2/3 \text{ et } Z_{14r} = P_2/3.$$

Voici donc les torseurs recherchés :

$$\begin{array}{l} \{\tau_{5 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -P_2 \\ 0,75.P_1 & 0 \end{Bmatrix}_{O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \\ \{\tau_{5 \rightarrow 23}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,25.P_1 + P_2 + P_3 & 0 \end{Bmatrix}_{D, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \\ \{\tau_{1 \rightarrow 4}(r)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ P_2/3 & 0 \end{Bmatrix}_{A, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \\ \{\tau_{23 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \\ 0,25.P_1 & 0 \end{Bmatrix}_{D, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \\ \{\tau_{1 \rightarrow 4}(la)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P_2/3 & 0 \end{Bmatrix}_{B, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_0} \end{array}$$