

## Programme de colle - semaine 27 du 18/05/2026 au 24/05/2026

### 1 Déterminant

Pas de démonstration, sauf pour les points marqués d'un (\*). **En gras**, les notions les plus importantes.

On met l'accent sur la pratique et la compréhension des propriétés élémentaires.

- **Forme  $n$ -linéaire alternée** : définition, nullité sur une famille liée (\*).  
Forme  $n$ -linéaire antisymétrique, alternée  $\Rightarrow$  antisymétrique (\*).
- Déterminant dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  : c'est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée des colonnes telle que  $\det(I_n) = 1$  (existence et unicité admises).  
**On écrira indifféremment  $\det(M)$  ou  $\det(C_1, \dots, C_n)$  quand  $C_1, \dots, C_n$  sont les colonnes de  $M$ .**
- **Effet des opérations sur les colonnes sur le déterminant** :  $C_i \leftarrow \alpha C_i$ ,  $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ ,  $C_i \leftrightarrow C_j$ .
- **Déterminant d'une matrice triangulaire.**
- Déterminant d'un produit, **caractérisation de l'inversibilité** (\*). Deux matrices semblables ont le même déterminant (réciproque fautive) (\*).
- Déterminant d'une transposée. **Effet des opérations sur les lignes sur le déterminant.**
- **Cofacteurs, développement suivant une ligne / colonne.** Comatrice  
 $A \cdot (\text{com } A)^\top = (\text{com } A)^\top \cdot A = (\det A) I_n$  (\*)  
La formule dite "règle de Sarrus" n'est pas au programme ni utile.
- Déterminant de Vandermonde.
- Déterminant d'un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  ( $E$  : EV de dimension finie) : c'est le déterminant de la matrice de  $f$  dans n'importe quelle base de  $E$  (ne dépend pas du choix de la base).  
Déterminant de  $\text{Id}_E$ ,  $f \circ g$ ,  $\lambda f$ .  
Caractérisation des automorphismes.
- Déterminant d'une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  ( $n = \dim E$ ) :  
 $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ .  
 $\det_{\mathcal{B}}$  est  $n$ -linéaire alternée,  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .  
Caractérisation des bases :  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  ssi  $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ .  
Changement de base :  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$ .
- **Cette partie a une importance moindre.**  
Groupe symétrique : cycles, transposition. Décomposition en produit de cycles à supports disjoints.  
Signature.  
Expression du déterminant d'une matrice sous forme d'une somme sur les permutations.

### 2 Exercices

1. D'après CCINP ancien exo 63 (possibilité de changer les coefficients)

Soit un entier  $n \geq 1$ . On considère la matrice carré d'ordre  $n$  à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour  $n \geq 1$ , on note  $D_n$  le déterminant de  $A_n$ .

- a) Démontrer que  $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$ .
- b) Déterminer  $D_n$  en fonction de  $n$ .
- c) Existe-t-il un vecteur colonne  $X$  non nul telle que  $A_n X = 0$  ?

2. a) Soit  $A = (a_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ .

Pour  $x \in \mathbb{K}$ , soit  $B(x)$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en ajoutant  $x$  à tous les coefficients, et soit  $d(x) = \det B(x)$ .

En faisant des opérations et un développement, montrer que la fonction  $d$  est affine.

b) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $b \neq c$ .

Dans cette question, on considère  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux valent  $a$ , les coefficients au-dessus de la diagonale ( $i < j$ ) valent  $b$ , ceux sous la diagonale ( $i > j$ ) valent  $c$ .

Donner d'après la question précédente un moyen permettant de calculer explicitement  $d(x)$  puis  $\det A$ .

c) **Bonus** : comment obtenir  $\det A$  quand  $b = c$ ?

3. a) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) Il existe  $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  **non nul** tel que  $MX = \lambda X$ .

ii)  $\det(M - \lambda I_n) = 0$ .

b) (Possibilité de changer la matrice  $M$ , mais ça doit rester simple. On peut la prendre de taille 2.)

On prend  $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

i) Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , calculer  $\det(M - \lambda I_3)$  puis  $\text{rg}(M - \lambda I_3)$ .

ii) Dire pour quelles valeurs de  $\lambda$  l'équation  $MX = \lambda X$  a des solutions non nulles, et dans chaque cas donner une base de l'ensemble des solutions.

iii) **Bonus (ne pas y passer trop de temps)**

Montrer que  $M$  est semblable à une matrice diagonale.

*On pourra considérer l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ , puis sa matrice dans deux bases bien choisies.*