

Programme de colle - semaine 28 du 25/05/2026 au 31/05/2026

1 Variables aléatoires réelles

- En MPSI, toutes les VA ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.
- Loi de probabilité d'une VA. La fonction de répartition n'est pas au programme.
- Espérance. La définition que nous avons prise est $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\})X(\omega)$ (formule jamais utilisée en pratique mais a l'avantage de rendre évidente la linéarité).
Formule de transfert : $\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$, en particulier $\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$.
- Variance, écart-type. Cas où $\mathbf{V}(X) = 0$.
Formule de Huygens : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$.
Variance de aX , de $X + b$.
Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev n'ont pas été vues (seront vues avec les couples de VA).
- Loi uniforme sur E (partie finie non vide de \mathbb{R}), sur $[[1, n]]$ ou sur $[[a, b]]$. Espérance.
- Loi de Bernoulli. Espérance, variance.
- Loi binomiale. Situation type : loi du nombre de succès après n tentatives indépendantes et dans des conditions similaires. Expression de la loi (brève explication), espérance, variance.

2 Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

UNIQUEMENT EN QUESTION DE COURS !

Les démonstrations à savoir sont marquées d'un (*)

- Produit scalaire dans un \mathbb{R} -espace vectoriel. Norme associée.
Espace préhilbertien : $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un \mathbb{R} -EV et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .
Espace euclidien : espace préhilbertien de dimension finie.
- **Exemples au programme** : à connaître, y compris la justification du fait que ce sont des produits scalaires :
Produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^n .
~~Produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}) : \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.~~
Produit scalaire intégral dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ($a < b$) : $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité (*). Inégalité triangulaire et cas d'égalité (*).
- Orthogonalité. Définition de l'orthogonal d'une partie A de E . A^\perp est un SEV de E (*).
- Famille orthogonale, orthonormée. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (*).

3 Exercices

Ne pas passer trop de temps sur les exercices déjà faits, donner à tout le monde un nouvel exercice de recherche de loi simple.

1. CCINP exo 95

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

- Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

- i) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - ii) Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
- b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
- i) Déterminer la loi de X .
 - ii) Déterminer la loi de Y .

2. CCINP exo 109

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.

On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

- a) Déterminer la loi de X .
- b) Déterminer la loi de Y .

3. CCINP exo 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

- a) Préciser les valeurs prises par X .
- b) i) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = 2)$.
ii) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
- c) i) Calculer $\mathbf{E}(X)$.
ii) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.