

**Programme de colle - semaine 29 du 01/06/2026 au 07/06/2026**

## 1 Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Les démonstrations à savoir sont marquées d'un (\*)

- Programme précédent : Produit scalaire dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, exemples au programme. Norme associée. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Inégalité triangulaire et cas d'égalité.
- Orthogonalité. Définition de l'orthogonal d'une partie  $A$  de  $E$ .  $A^\perp$  est un SEV de  $E$ . Famille orthogonale, orthonormée. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (à partir d'une famille libre, construire une famille orthonormée qui engendre le même SEV).
- Calculs dans une base orthonormée : expression des coordonnées d'un vecteur, du produit scalaire (\*).
- Si  $F$  est un SEV de dimension finie de  $E$ , alors  $E = F \oplus F^\perp$ . Projection orthogonale sur un SEV de dimension finie. Expression à partir d'une base orthonormée de  $F$  (\*).  
Si  $E$  est de dimension finie, alors  $(F^\perp)^\perp = F$  (\*).
- Distance d'un élément à une partie non vide de  $E$  : définition.  
La distance de  $u$  à  $F$  (SEV de dimension finie) est atteinte en unique point : le projeté orthogonal de  $u$  sur  $F$ . (Ne pas hésiter à guider pour les questions de calcul d'inf).
- La notion d'isométrie n'est plus au programme en sup.
- Commencer par un exercice basique : reconnaissance d'un produit scalaire, recherche d'une base orthonormée d'un plan, inégalité de type Cauchy-Schwarz.

## 2 Exercices faits

Il est bien sûr possible de changer légèrement les données, si ça n'alourdit pas les calculs.

1. Soit  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, -1, 1)$  et  $u_3 = (1, 0, 0)$ .  
Vérifier que  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , et l'orthonormaliser (pour le produit scalaire canonique).  
*On n'est pas obligé de finir complètement les calculs*
  
2. Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ .  
Donner une base orthonormée de  $F$ , puis la matrice dans la base canonique de  $p$ , la projection orthogonale sur  $F$ .  
*On n'est pas obligé de finir complètement les calculs*
  
3. **CCINP exo 76**  
Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $(|)$ .  
On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ 
  - a) i) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
ii) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
  - b) Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) / \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$ .  
Prouver que l'ensemble  $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt / f \in E \right\}$  admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

#### 4. CCINP exo 81

On définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$ , où  $\text{tr}(A^\top A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^\top$  par la matrice  $A'$ .

On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

- a) Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- b) Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
- c) Déterminer la projection orthogonale de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
- d) Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .