

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes : autrement dit, donner l'ensemble des solutions.
Dans chaque cas il faut se ramener à une équation d'un type connu.

- a) $(E) : x + 1 = \sqrt{x + 1}$
- b) $(E) : x - 1 = \sqrt{x + 1}$
- c) $(E) : 2e^{-2x} - e^{-x} - 1 = 0$
- d) $(E) : 2e^{-2x} - e^{-x} - 1 \leq 0$
- e) $(E) : \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x-1} > 1$

2. Équation à paramètre

Soit a un paramètre réel. On considère l'équation $(E) : 1 + x = a(1 - x)$ d'inconnue x .
Donner en fonction de a l'ensemble des solutions.

3. Étude de signe, simplification d'expression

Soit $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ et $g(x) = x - 2\sqrt{x-1}$.

- a) Donner $\mathcal{D}_g$, l'ensemble de définition de g .
- b) Montrer que pour tout x dans $\mathcal{D}_g$, $g(x) \geq 0$.
- c) Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f .
- d) Simplifier $f(x)^2$, et en déduire une expression de $f(x)$ plus simple que celle de départ.
- e) Tracer le graphe de f (sans utiliser de calculatrice, bien sûr)

4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Traduire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes et faire un dessin qui traduit la propriété.

- a) f est constante (avec deux $\forall$).
- b) f est constante (avec un $\forall$ et un $\exists$).
- c) f n'est pas constante.
- d) f est croissante.
- e) f n'est pas croissante.

5. Pour chacune des propriétés suivantes :

- Écrire sa négation en utilisant des quantificateurs ($\exists$ et $\forall$)
- Dire si elle est vraie.

- a) $p_1 : \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$
- b) $p_2 : \forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
- c) $p_3 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$
- d) $p_4 : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$
- e) p_5 : cet été, il a fait tous les jours plus de 30° .

6. Dire si les expressions ensemblistes suivantes ont un sens et si oui, les traduire en une phrase, puis les décrire explicitement sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

- a) $\{x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2\}$
- b) $\{x^3 - x, x \in [-1, 3]\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R}, x^2\}$
- d) $\{e^x > 1, x \in \mathbb{R}\}$

7. Décrire explicitement les ensembles suivants sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

- a) $E_1 = \{x \in \mathbb{R}, e^x \leq 2\}$
- b) $E_2 = \{x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 4x\}$
- c) $E_3 = \left\{\cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$
- d) $E_4 = \{x^2, x \in [-1, 2]\}$

8. Propriétés diverses

Montrer les propriétés suivantes :

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x \leq 20 \Rightarrow |x| \leq 5$
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n-1)$ est pair.
- c) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [x^2 + xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)]$
- d) Pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\left(\exists x \in \mathbb{R}^{*+}, y = x + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y \geq 2$$

9. Quel est le plus grand : 4^{75} ou 3^{100} ?

10. Simplifier les expressions suivantes :

- a) $\frac{(e^2)^5}{e^9}$
- b) $\sqrt{\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2}$
- c) $\frac{1}{1+e} - \frac{e^{-1}}{1+e^{-1}}$
- d) $\frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$
- e) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ avec $x = \ln(3)$.

11. Trouver tous les couples $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Récurrences

1. Montrer les propriétés suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$

c) $\forall n \geq 4, n! > 4^{n-2}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (4k-2) = \frac{(2n)!}{n!}$

e) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, \pi], |\sin(n\theta)| \leq n \sin \theta$

Rappels :

- Inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x+y| \leq |x| + |y|$
- Formule d'addition : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

2. Principe de récurrence double

a) Soit p_n une propriété dépendant de l'entier n , définie pour $n \geq n_0$.

On suppose que

$$\begin{cases} p_{n_0} \text{ et } p_{n_0+1} \text{ sont vraies} \\ \forall n \geq n_0, (p_n \text{ et } p_{n+1}) \Rightarrow p_{n+2} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \geq n_0$, p_n est vraie.

Indication : on pourra appliquer le principe de récurrence simple à une propriété q_n bien choisie.

b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} \quad (\text{suite de Fibonacci})$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Sommets

3. Écrire les sommes suivantes à l'aide d'un $\sum$ (on ne cherchera pas à les simplifier) :

a) $x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$

b) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$

c) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$

4. Expliciter tous les termes des expressions suivantes, pour $n = 1, 2, 3$ successivement (ne pas chercher à simplifier le résultat) :

a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

b) $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$

5. Les formules suivantes sont-elles vraies ou inventées ?

- a) $\sum_{k=1}^n (u_k v_k) = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) \left(\sum_{k=1}^n v_k \right)$
- b) $\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n v_k \right)$
- c) $\sum_{k=1}^n (u_k - v_k) = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n v_k \right)$
- d) $\sum_{k=1}^n (u_k + c) = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) + c$
- e) $\sum_{k=1}^n (u_k^2) = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right)^2$
- f) $\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{v_k} = \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{\sum_{k=1}^n v_k}$
- g) $\sum_{k=1}^n \cos(u_k) = \cos \left(\sum_{k=1}^n u_k \right)$

6. Simplifier (si possible) la somme (ou le produit) en une expression explicite.

n est un entier strictement positif.

a) **Calculable ou pas ?**

- i) $\sum_{k=1}^n e^{-k}$
- ii) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}$
- iii) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- iv) $\sum_{k=1}^n e^{-k^2}$

b) **Sans coefficients binomiaux**

- i) $\sum_{k=1}^n (3 \times 2^k + 1)$
- ii) $\sum_{k=0}^n (2k - 1 + 2^k)$
- iii) $\sum_{k=1}^n 2^{2k+1}$
- iv) $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left(\frac{k}{n} \right)$
- v) $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{k+1} \right)$
- vi) $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)}.$

Indication : on pourra chercher deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$

- vii) $\prod_{k=1}^n \exp \left(\frac{k}{n} \right)$
- viii) $\sum_{k=0}^n |k - 1|$

c) **Avec coefficients binomiaux**

$(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

i) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

ii) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k$

iii) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

iv) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{2k+1} b^{n-k}$

v) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+k}$

d) **Sommes doubles**

i) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$

ii) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{i}{j}$

iii) $S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$ Pour simplifier le calcul, considérer $S_{n+1} - S_n$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

a) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k$. Simplifier $f(x)$.

b) En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur explicite de $g(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

c) En déduire S .

d) Vérifier que pour tous k, n tels que $1 \leq k \leq n$, on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, et retrouver l'expression explicite de S par un calcul direct.