

Programme de colle - semaine 03 du 28/09/2026 au 04/10/2026

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un (*).

1 Les complexes

Dans cette première colle, uniquement des exercices avec des petits calculs de base utilisant la forme algébrique, la forme exponentielle ou l'angle moitié.

- Forme algébrique d'un complexe. Partie réelle, imaginaire.
- Opérations de base : somme, produit, inverse, conjugué.
- Module. Propriétés : module d'un produit (*), quotient. Inégalité triangulaire (*), cas d'égalité.
- Exponentielle d'un imaginaire pur, $e^{i(\theta+\theta')} = \dots$, formules d'Euler, de Moivre.
- Argument, exponentielle d'un complexe quelconque (pas d'exercice fait). Forme trigonométrique (ou exponentielle) d'un complexe non nul.
- Angle moitié, mise sous forme trigonométrique de $1 \pm e^{i\theta}$ ou $e^{ia} \pm e^{ib}$: le résultat n'est pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver rapidement.
- **NOTIONS PAS ENCORE VUES** : linéarisation, antilinéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$, $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ et autres sommes, racines carrées sous forme algébrique, équation du second degré à coefficients complexes, racines n^{es} .

2 Primitives et intégrales

Donner à tout le monde un petit calcul d'intégrale (calcul direct ou IPP) ou simplement une recherche de primitive.

- Toute fonction continue sur un intervalle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet des primitives (admis). Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle, connaissant l'une d'entre elles.
- Brève extension des notions de continuité, dérivabilité, primitive aux fonctions à valeurs complexes. Dérivée de $t \mapsto e^{mt}$ avec $m \in \mathbb{C}$ donné. Application à la recherche de primitive de $t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ou $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^2$.
- Définition de l'intégrale : si f est continue sur I (intervalle) et $a, b \in I$, on pose $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$, F étant une primitive de f . Cette définition est cohérente.

Avoir le réflexe de revenir à la définition si on ne sait pas quoi faire.
- Propriétés élémentaires de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité, positivité (*), croissance. Si $a \leq b$, alors $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ (*)
- Théorème fondamental de l'intégration (*) : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- Intégration par parties (*).
- Sur un exemple, dérivation de $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$ (formule pas au programme mais avoir le réflexe immédiat d'introduire une primitive).
- **PAS ENCORE VU : Changement de variable**, primitive de $f : t \mapsto \frac{at+b}{t^2+ct+d}$.

3 Exercices faits

1. Vrai ou faux ?

$$\text{a) } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad (a + ib) + i(a - 2ib) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + ib = 0 \\ a - 2ib = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad (a + ib) + i(a - ib) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + ib = 0 \\ a - ib = 0 \end{cases}$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E) : \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\theta}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Résoudre (E) . On donnera le nombre de solutions en fonction de θ et on simplifiera au maximum les solutions.

3. Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \int_{x+1}^{2x} \frac{1}{(e^t - 1)^2} dt$ et son tableau de signe.