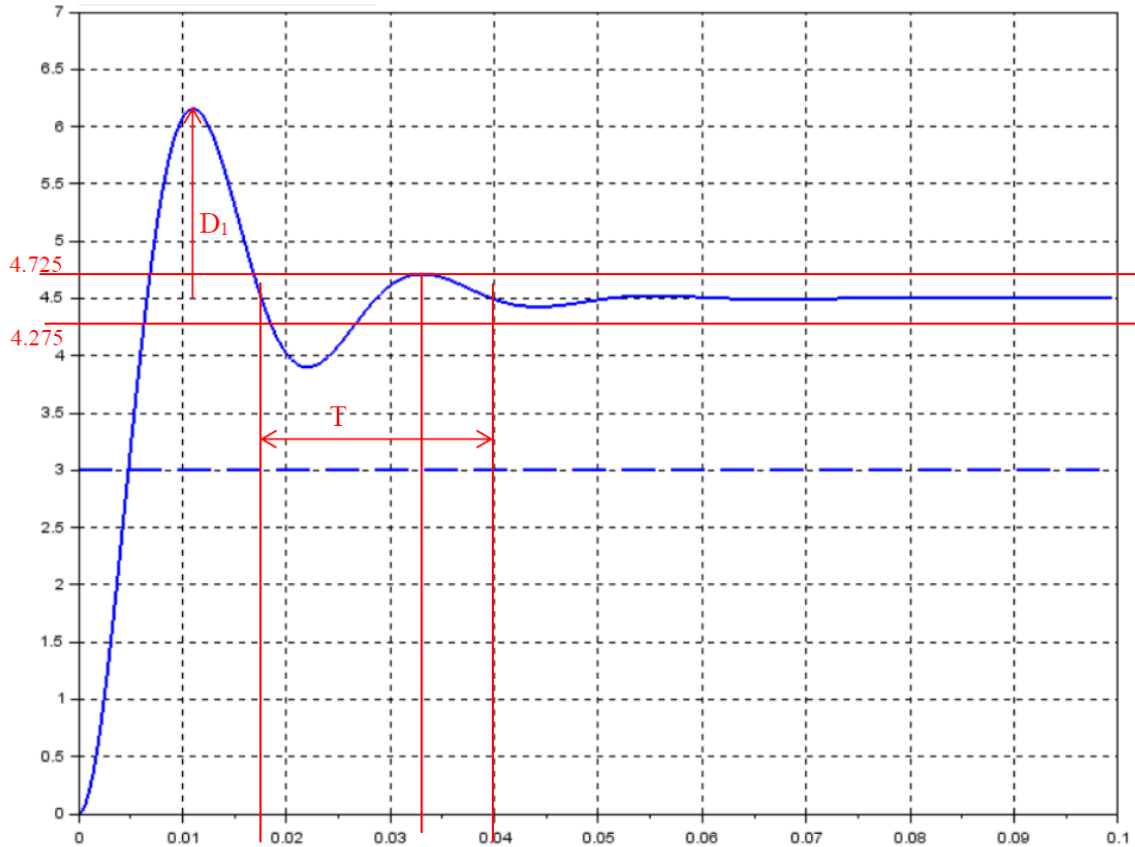


Exercice: Evaluation de performances

- Erreur statique : $e(\infty) = s(\infty) = 3 - 4.5 = -1.5$
- Temps de réponse : bande à $\pm 5\%$ de V.A. = $\pm 0.225 \Rightarrow$ borne sup = 4.725 et borne inf = 4.275

On mesure $tr_{5\%} \approx 0.033$ s

- 1^{er} dépassement : $d_{1\%} \approx \frac{6.2-4.5}{4.5} * 100 \approx 37\%$



Problème: Hot Bird 4

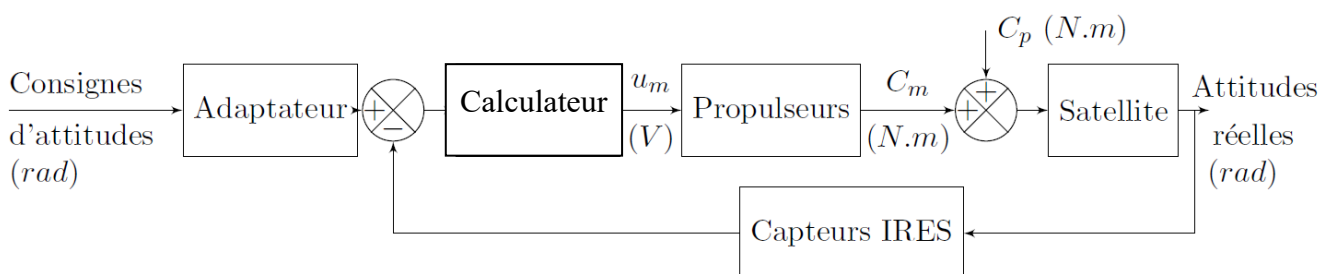
$$Q1 : J \frac{d^2 \theta_T(t)}{dt^2} = C(t) \Rightarrow J p^2 \theta_T(p) = C(p) \Rightarrow G(p) = \frac{\theta_T(p)}{C(p)} = \frac{1}{J p^2}$$

$$Q2 : \theta_T(p) = G(p) \cdot C(p) = \frac{1}{J p^2} \Rightarrow \theta_T(t) = \frac{1}{J} \cdot t \cdot u(t) \text{ avec } u(t) \text{ l'échelon unitaire.}$$

Q3 : un bref jet de gaz provoque un mouvement à vitesse de rotation constante donc un angle qui croît linéairement en fonction du temps donc indéfiniment.

Aucun frottement dans le modèle proposé ne va ralentir la rotation. Le satellite ne peut pas être orienté correctement. Le modèle de l'impulsion est un modèle mathématique non réalisable physiquement. Apport d'NRJ durant un temps infiniment court.

Q4 : entrées et sortie du comparateur en Volt



Q5 : $J_s \ddot{\theta}_T(t) = C_m(t) + C_p(t) \rightarrow J_s p^2 \theta_T(p) = C_m(p) + C_p(p)$ donc $A(p) = \frac{p^2 \theta_T(p)}{C_m(p) + C_p(p)} = \frac{1}{J_s}$

$$B(p) = \frac{1}{p^2}$$

Q6 : Pour que le système soit correctement asservi et donc, notamment, précis, il faut que l'écart ε soit nul lorsque la sortie θ_T est égale à l'entrée θ_c . $\varepsilon(p) = u_c(p) - u_{capt}(p) = K_a \theta_c(p) - K_c \theta_T(p) = (K_a - K_c) \theta_c(p) = 0$. On en déduit la condition : $K_a = K_c$

Q7 : On utilise la formule de Black pour trouver la fonction de transfert du système

$$H(p) = \frac{\theta_T(p)}{\theta_c(p)} = K_a \frac{K_1 K_2}{J_s p^2 + K_1 K_2 K_c} = \frac{\frac{K_a}{K_c}}{\frac{J_s}{K_1 K_2 K_c} p^2 + 1} \quad \text{avec } \alpha = \frac{J_s}{K_1 K_2 K_c}$$

Q8 : on cherche les racines du dénominateur de la FTBF notée $H(p)$: $\mp i \sqrt{\frac{K_1 K_2 K_c}{J_s}}$

Partie réelle des pôles de la FTBF nulle ici, donc pas strictement négative... Système instable !

Remarque : $H(p)$ est une FT d'un ordre 2 sans amortissement ($\xi = 0$) donc réponse indicielle oscillante avec amplitudes constantes càd système juste instable (voir Pb1 hydroplaneur). On obtient une solution sinusoïdale si on revient à l'équation différentielle équivalente.

$$Q9 : H_i(p) = \frac{p \theta_T(p)}{U_m(p)} = \frac{K_2}{J_s p + K_2 K_v} = \frac{\frac{1}{K_v}}{\frac{J_s}{K_2 K_v} p + 1}$$

$$\text{Gain statique : } K_i = \frac{1}{K_v} \quad \text{constante de temps : } \tau_i = \frac{J_s}{K_2 K_v}$$

Q10 : C'est du cours : démonstration **à savoir refaire** avec Laplace. Vous apprendrez une autre méthode de résolution en physique et en math.

On met un échelon unitaire en entrée, donc $u_m(t) = u(t)$. Par Laplace : $U_m(p) = \frac{1}{p}$

La transformée de Laplace de la sortie s'écrit notée $\dot{\theta}_T(p)$ ou $p \theta_T(p) = H_i(p) U_m(p) = \frac{K_i}{\tau_i p + 1} \cdot \frac{1}{p}$

On décompose en éléments simple : $\dot{\theta}_T(p) = \frac{K_i}{\tau_i p + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{A}{\tau_i p + 1} + \frac{B}{p}$

On calcule $A = \lim_{p \rightarrow -\frac{1}{\tau_i}} (\tau_i p + 1) \dot{\theta}_T(p) = -K_i \tau_i$ et $B = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \dot{\theta}_T(p) = K_i$

D'où $\dot{\theta}_T(p) = -\frac{K_i \tau_i}{\tau_i p + 1} + \frac{K_i}{p} = \frac{K_i}{p} - \frac{K_i}{p + \frac{1}{\tau_i}}$ pour retrouver la forme $\frac{1}{p+a}$ du tableau des transformées.

En utilisant ce tableau (ce qui correspond à faire Laplace inverse) :

$$\dot{\theta}_T(t) = K_i u(t) - K_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} u(t) = K_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}\right) u(t)$$

Q11 : On identifie $K_i = 1$ (valeur à convergence ou asymptote horizontale à l'infini) et $\tau_i = 0.8s$ (intersection tangente à l'origine et asymptote horizontale ou via $tr\ 5\% = 3\tau$).

$$Q12 : H_{bf}(p) = \frac{\theta_T(p)}{\theta_c(p)} = \frac{K_1 K_i}{(1 + \tau_i p) p + K_1 K_i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_1 K_i} p + \frac{\tau_i}{K_1 K_i} p^2}$$

Ce qui donne : gain statique $K = 1$ pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 K_i}{\tau_i}}$ coeff d'amort $\xi = \frac{1}{2\sqrt{\tau_i K_1 K_i}}$

Q13 : La précision est optimale : l'erreur statique est nulle puisque l'amplitude de l'échelon est de $0,01 \text{ rad} \approx 0,3^\circ$ et que la valeur à convergence de la réponse indicielle vaut 1.10^{-2} rad . Le CDC, qui demande moins de $0,05^\circ$, est vérifié.

Q14 : Pour la rapidité, on trace les bandes à $\pm 5\%$ de la valeur à convergence et on mesure le temps de réponse à 5% : $tr5\% = 5,2 \text{ s}$. Le critère associé impose moins de $20s$; il est vérifié.

On mesure un premier dépassement relatif de 8% $d_1 = \left| \frac{s(\infty) - s(t_1)}{s(\infty)} \right| = \left| \frac{1 - 1.08}{1} \right| = 0.08 = 8\%$. Le CDC demande moins de 50% ; ce critère est validé.

Q15 : On a bien affaire à la réponse indicielle d'un système d'ordre 2 : la tangente à l'origine est horizontale !

- On retrouve un gain de 1 ($K = 1$) puisque l'amplitude de l'échelon est de 0,01 rad et que la valeur à convergence de la réponse indicielle vaut 1.10^{-2} rad.
- On mesure un premier dépassement relatif de 8%.

Alors, le premier abaque permet de déterminer la valeur de $\xi = 0,63$

- On lit alors sur le second abaque que le temps de réponse réduit vaut : $\omega_0 \cdot tr_{5\%} = 5$ rad. En utilisant le temps de réponse à 5% du système, $tr_{5\%} = 5,2s$, on en déduit ainsi la valeur de la pulsation propre non amortie : $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$

Q16 : Soit on procède par superposition en transformant les schémas obtenus pour pouvoir utiliser la formule de Black soit on traduit le schéma d'origine en équations :

$$\begin{aligned} \theta_T &= \frac{1}{J_s p^2} (C_m + C_p) & C_m &= K_2 (C \cdot \varepsilon - K_v p \theta_T) & \varepsilon &= \theta_c - \theta_T \\ \Rightarrow \theta_T &= \frac{1}{J_s p^2} (K_2 (C (\theta_c - \theta_T) - K_v p \theta_T) + C_p) \\ \Rightarrow \theta_T \left[1 + \frac{K_2 C + K_2 K_v p}{J_s p^2} \right] &= \frac{1}{J_s p^2} (K_2 C \theta_c + C_p) \\ \Rightarrow \theta_T &= \frac{K_2 C(p)}{J_s p^2 + K_2 C(p) + K_2 K_v p} \theta_c(p) + \frac{1}{J_s p^2 + K_2 C(p) + K_2 K_v p} C_p(p) \\ \text{D'où : } H_c(p) &= \frac{K_2 K_1}{J_s p^2 + K_2 K_1 + K_2 K_v p} \text{ on retrouve } H_{bf} & H_r(p) &= \frac{1}{J_s p^2 + K_2 K_1 + K_2 K_v p} \end{aligned}$$

Q17 : $\theta_c(p) = \frac{\theta_0}{p}$ et $C_p(p) = \frac{-C_0}{p}$

Q18 : On suppose la stabilité du système et on applique le théorème de la valeur finale :

$$\begin{aligned} \theta_{T\infty} &= \lim_{p \rightarrow 0} p \theta_T(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p \cdot K_2 C(p)}{J_s p^2 + K_2 C(p) + K_2 K_v p} \theta_c(p) + \frac{p}{J_s p^2 + K_2 C(p) + K_2 K_v p} C_p(p) \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{K_2 K_1}{J_s p^2 + K_2 K_1 + K_2 K_v p} \theta_0 - \frac{1}{J_s p^2 + K_2 K_1 + K_2 K_v p} C_0 \right] = \theta_0 - \frac{1}{K_2 K_1} C_0 \end{aligned}$$

Q19 : Couple perturbateur max : $C_0 = 2.10^{-5} \text{ Nm}$

L'erreur de pointage du système perturbé sera au max de $|\theta_{T\infty} - \theta_0| = \frac{1}{K_2 K_1} C_0 = 0.05 * \left(\frac{\pi}{180} \right) = 8.7.10^{-4} \text{ rad}$

D'où $K_2 K_1 = \frac{C_0}{8.7.10^{-4} \text{ rad}} = 0.023 \text{ USI}$

Q20 : on calcule l'effet de la perturbation sur $\theta_{T\infty}$:

$$\begin{aligned} \theta_{T\infty} &= \lim_{p \rightarrow 0} p \theta_T(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p}{J_s p^2 + K_2 \cdot \frac{K_1}{p} + K_2 K_v p} C_p(p) \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[-\frac{p}{J_s p^3 + K_2 K_1 + K_2 K_v p^2} C_0 \right] = 0 \end{aligned}$$

Le système « rejette » la perturbation ! l'intégrateur amené par le correcteur est placé en amont de la perturbation.

Remarque importante : Le système en Boucle fermée est instable. Ordre 3 avec racines du dénominateur de $H_c(p)$ à partie réelle non strictement négative en utilisant les résultats des identifications. La réponse indicielle est non bornée. Le théorème de la valeur finale ne s'applique plus !

Pour y remédier et rejeter la perturbation, il faut prévoir un correcteur proportionnel intégral. Il apporte une correction intégrale uniquement à basse fréquence (théo valeur finale) et permet de conserver la stabilité tout en améliorant la précision (voir programme de 2^{ème} année) : $C(p) = K_1 \left(\frac{1}{\tau_1 p} + 1 \right)$