MPSI

Programme de colle - semaine 06 du 02/11/2026 au 08/11/2026

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1 Fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

- Le but est avant tout de se familiariser avec les méthodes de base (avoir le réflexe de faire le lien entre racine et factorisation, penser immédiatement au degré, au coefficient dominant, au nombre de racines, etc.).
- La définition formelle des polynômes n'a pas été vue. Pour l'instant les notions de **fonction polynômiale** et **polynôme** sont confondues.
- Définition d'une fonction polynômiale (avec quantificateurs et symbole $\sum$).
  Notations $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ou $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ ou $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k x^k$ (avec (a_k) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ presque nulle).
  La somme, le produit de fonctions polynômiales sont des fonctions polynômiales.
- Unicité des coefficients : 2 versions ont été données (ne pas demander la démonstration mais les propriétés doivent être correctement énoncées, en plaçant bien les quantificateurs) :
  - Si deux fonctions polynômiales sont égales, alors leurs suites de coefficients sont égales.
  - Si une fonction polynômiale est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.
- Coefficients de la somme, du produit.
  Degré d'un polynôme. Degré de la somme, du produit. Coefficient dominant, polynôme unitaire.
  Si le produit de deux fonctions polynômiales est nul, alors l'une des deux est nulle.
- Racine d'une fonction polynômiale : définition et caractérisation en terme de factorisation (*).
  Factorisation d'un polynôme dont on connaît plusieurs racines **distinctes**.
  Tout polynôme de degré au plus n, ayant au moins $n+1$ racines distinctes, est nul.
  Tout polynôme ayant une infinité de racines est nul.
- Théorème de D'Alembert-Gauss. Factorisation complète dans $\mathbb{C}$.
- Factorisation complexe de $P : x \longmapsto x^n - 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. (*)

Tout ce qui n'apparaît pas explicitement dans la liste précédente n'a pas encore été vu. En particulier :

- Notations X, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$.
- Factorisation réelle (cas général).
- Racine simple/multiple.
- Polynôme irréductible. Division euclidienne, arithmétique des polynômes. Relations entre coefficients et racines (sauf degré 2).

2 Théorie des fonctions

- Pas de définition précise de la notion de fonction : une fonction de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. On ne distingue pas les notions de fonction et d'application.
- Image directe, notation $f(A)$. Image réciproque, notation $f^{-1}(B)$ indépendamment de la notion de bijection.
  Savoir écrire l'image directe et l'image réciproque avec les notations ensemblistes.
- Composition. Application identique. Restriction (notation $f_{|A}$), prolongement.
- Application injective, surjective, bijective. Composition de deux applications injectives $(*)$, surjectives $(*)$, bijectives.
  Savoir définir les notions de fonctions injectives / surjectives avec des schémas puis avec des quantificateurs.
- Réciproque d'une bijection. Réciproque d'une composée.

3 Exercices

1. a) Montrer que la fonction polynômiale $P(x) = 2x^3 - 6x + 1$ a trois racines réelles distinctes (**qu'on ne cherchera pas à calculer**). On les note α, β, γ.
   Possibilité de changer la fonction
   b) Calculer $\alpha\beta\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$.

2. **D'après CCINP Exercice 84 déjà posé**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère l'équation (E) : $(z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

   a) Justifier, sans la résoudre, que (E) a au plus $n-1$ solutions dans $\mathbb{C}$.

   b) On admet que les solutions de (E) sont $\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$, $\quad k \in [\![1, n-1]\!]$.

   Donner la factorisation de la fonction polynomiale $P : z \longmapsto (z+i)^n - (z-i)^n$.

3. *Pour l'instant, seuls les exercices de ce style ont été faits sur la théorie des fonctions. Possibilité de changer la fonction.*

   Soit f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$

   a) f est-elle injective ? Surjective ?

   b) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$

   c) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right)$

   d) Soit g : $\begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

   Montrer que g est bien définie et qu'elle est bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.