TD 11 : Structures algébriques

Lois de composition interne

1 Soit E un monoïde, et x un élément inversible. Montrer que x^{-1} est inversible et que $(x^{-1})^{-1} = x$.

2 Soit X un ensemble possédant au moins deux éléments distincts a et b. En construisant deux applications f_a et f_b de X dans X telles que $f_a \circ f_b \neq f_b \circ f_a$, montrer que $(F(X,X), \circ)$ n'est pas commutatif.

3 Soit $E = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1) L'addition définit-elle une loi de composition interne sur E ?
2) La multiplication définit-elle une loi de composition interne sur E ?

4 Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne $\star$ qui admet un élément neutre e et un élément absorbant a. Peut-on avoir $a = e$?

5 On munit $\mathbb{R}$ des deux lois de composition interne * et T définies par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x * y = 2xy \text{ et } xTy = x + 2y$$

1) La loi * est-elle distributive par rapport à T ?
2) La loi T est-elle distributive par rapport à $*$?

6 Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier de centre O. On définit une loi de composition interne $\star$ sur E en posant, pour tout $(x,y) \in E^2, x \star y = z$ où z est le symétrique de x par rapport à (Oy).

1) Dresser la table de loi de $\star$.
2) Quelles sont les propriétés de $\star$?
3) Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in E$: $a \star x = e, x \star a = e, x \star x = a, x \star x = x$.

7 On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbb{N}^2$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \star 0 = 0 \star p = p \text{ et } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}, p \star q = 0$$

1) Démontrer que $\star$ possède un élément neutre.
2) Déterminer le ou les inverses d'un élément $p \in \mathbb{N}$. Qu'en conclure sur la loi $\star$?

8 On définit une loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a * b = \ln\left(e^a + e^b\right)$$

Quelles sont ses propriétés ? Possède-t-elle un élément neutre ?

9 Sur $E = [0,1]$, on définit une loi $*$ par :

$$\forall (x,y) \in E^2, x * y = x + y - xy$$

1) Montrer que * est une loi de composition interne, commutative et associative.
2) Montrer que * possède un élément neutre.
3) Quels sont les éléments inversibles ?Réguliers ?

10 Soit $(E,*)$ un monoïde avec E ensemble fini. Montrer que tout élément régulier de E est inversible.

Groupes

11 Soit $(G,\star)$ un groupe. Déterminer toutes les tables de $\star$ possibles lorsque G est d'ordre 2,3 et 4 .

12 Soit $(G,*)$ un groupe. On définit le centre du groupe G par :

$$Z(G) = \{a \in G, \forall x \in G, a * x = x * a\}$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

13 Soit $(G,*)$ un groupe tel que :

$$\forall x \in G, x^2 = e$$

Montrer que G est commutatif.

14 Soit G un groupe.

1) Soit A un sous-groupe de G. Soit $(a,b) \in G^2$ tel que $a \in A$ et $b \notin A$. Montrer que $ab \notin A$ et $ba \notin A$.
2) Soit H et K deux sous-groupe de G.
   a) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.
   b) En déduire que $H \cup K = G$ si, et seulement si, $H = G$ ou $K = G$.

15

1) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, m = kn\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.
2) Soit maintenant G un sous-groupe non réduit à $\{0\}$ de $(\mathbb{Z},+)$.
   a) Montrer que $d = \min(G \cap \mathbb{N}^*)$ est bien défini, et que $d > 0$.
   b) Montrer que d divise tous les éléments de G(on pourra utiliser une division euclidienne.i.e : $\forall n,d \in \mathbb{Z}, \exists q,r \in \mathbb{Z} \times [\![0,d-1]\!], n = dq + r$.
   c) Conclure.

16

Sur $G =]-1,1[$, on définit une loi * par :

$$\forall (x,y) \in G^2, x * y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien.

17 ★★ Soit G un groupe commutatif fini de cardinal n. Montrer que :

$$\forall x \in G, x^n = e$$

où e est l'élément neutre de G. En déduire les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Morphisme de groupe

18 Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on pose $\varphi_g : G \to G\ h \mapsto ghg^{-1}$

1) Montrer que φ_g est un automorphisme de G pour tout $g \in G$ (on pourra déterminer sa bijection réciproque).
2) Montrer que $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ est un morphisme de groupe

$$g \mapsto \varphi_g$$

3) Déterminer $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

19 On munit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de sa structure naturelle de groupe pour la loi produit notée *. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{C}^*$ est un morphisme de groupes.

$$(r,\theta) \longmapsto re^{t\theta}$$

20 On considère f :

$$\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$
$$z \mapsto \frac{z}{|z|}$$

1) Montrer que f est un morphisme de groupes.
2) Déterminer son noyau et son image.

21 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto x^n \end{array}$$

Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^*,\times)$. En déterminer l'image et le noyau.

22 ★★ Soit $(G,*)$ et $(G',+)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1) Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
2) Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Anneaux

23 Soit A un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p = 0$.

1) On suppose dans cette question uniquement que A est intègre. Quels sont les nilpotents de A ?
2) Montrer que si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible.
3) Soit $x \in A$ et $y \in A$ tels que $xy = yx$. Montrer que si x et y sont nilpotents, alors xy et $x + y$ aussi.

24 Soit $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \left\{a + b\sqrt{d}, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un anneau.

25 Soit A et B deux anneaux. Soit f un morphisme d'anneaux de A dans B. Soit A' un sous-anneau de A et B' un sous-anneau de B.

Montrer que $f\left(A'\right)$ est un sous-anneau de B.

Montrer que $f^{-1}\left(B'\right)$ est un sous-anneau de A.

Corps

26

1) Démontrer que $A = \left\{a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$ est un corps.
2) Montrer que $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un corps.

27 ★★

1) Soit E un ensemble fini et soit Φ une application de E dans E injective. Montrer que E est surjective. (On pourra admettre ce résultat pour la question suivante).
2) Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps.

28

29