TD 10 : Nombres réels et suites numériques

Nombres réels

1 Démontrer que les réels suivants sont irrationels :

1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ où x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$A_n = \{r^n, r \in \mathbb{Q}\}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante afin que A_n soit dense dans $\mathbb{R}$.

3 Montrer qu'étant donné deux réels distincts x et y, il existe, compris entre x et y :

1) une infinité de décimaux ;
2) une infinité de rationnels ;
3) une infinité d'irrationnels.

4 Démontrer que la partie A est dense dans $[0,1]$:

$$A = \left\{\frac{k}{2^n}, n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in [\![0, 2^n]\!]\right\}$$

5 ★★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$ un irrationnel. Démontrer que :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \right\rfloor = n-1$$

6

1) Soit I un intervalle ouvert de la forme $]c,d[$, $(c,d) \in \bar{R}^2$. Montrer que :

$$\forall x \in I, \exists r > 0,]a-r, a+r[\subset I.$$

2) Soient I et J deux intervalles ouverts. On suppose que $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \varnothing$. Démontrer que $I \cap J = \varnothing$.

7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que : $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.
2) En déduire la partie entière du nombre réel $S = \sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

8 Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1) On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\sup A \leqslant \sup B$ et $\inf A \geqslant \inf B$.
2) Montrer que les quantités suivantes existent, et les déterminer en fonction de $\inf A, \inf B, \sup A$ et $\sup B$:
   a) $\sup(A+B)$, où $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$;
   b) $\inf(A \cup B)$;
   c) $\sup(A \cup B)$.
3) On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Comparer $\inf(A \cap B), \sup(A \cap B), \min(\sup A, \sup B)$ et $\max(\inf A, \inf B)$. Les inégalités peuvent-elles être strictes ?

9 Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathbb{R}^X$, on pose (lorsque cela existe) :

$$\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}.$$

1) Pour $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^X$ telles que $\sup f$ et $\sup g$ existent, établir :

$$\sup(f+g) \leqslant \sup f + \sup g.$$

2) Justifier qu'en général, on n'a pas : $\sup(f+g) = \sup f + \sup g$.

Généralités sur les suites/convergence

10 Traduire chacun des énoncés suivants :

1) $\exists \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq M, |u_n - l| < \varepsilon$.
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq M, |u_n - l| < \varepsilon$.
3) $\exists M \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq M, |u_n - l| < \varepsilon$.
4) $\forall n \geq M, \exists M \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, |u_n - l| < \varepsilon$.
5) $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{N}, (n \geq M \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$.

11 En utilisant la définition de la convergence, montrer que la suite $\left(\frac{n}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .

12 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .
2) La réciproque est-elle vraie ?

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$(E_n) : x^n + nx - 1 = 0$$

a) Montrer que (E_n) possède une unique solution positive que l'on note x_n. b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

14 ★ Étudier la convergence de la suite :

$$u_n = \left(5\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{5}\cos(n)\right)^n$$

où $n \geq 1$.

15 La suite (a_n) est définie pour $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \sqrt{4 + 3a_n} \text{ et } a_0 = 0$$

1) Démontrer que (a_n) est majorée par 4 .
2) Démontrer que (a_n) est croissante.
3) En déduire que (a_n) est convergente et trouver sa limite.

16 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n), (v_n)$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq a, v_n \leq b$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = a + b$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = b$.

17

1) Soit (u_n) une suite réelle non constante et r-périodique avec $r \geq 2$. Démontrer que (u_n) diverge.
2) Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. Montrer, en utilisant la définition, que (u_n) est stationnaire.

18 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, tels que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1) Que peut-on en déduire sur la suite $(\frac{u_n}{v_n})$?
2) On suppose que (v_n) converge vers 0 . Montrer que (u_n) converge aussi vers 0 .
3) On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de (v_n) ?

19 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1) Montrer que : $\forall k \geqslant 2, \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

20 Etudier la convergence des suites suivantes données par leur terme général :

1) $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$ où $x \in \mathbb{R}$.
2) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$
3) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
4) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$
5) $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$
6) $u_n = n^{\frac{1}{\ln(n)}}$
7) $u_n = n^{\frac{\sin(n)}{n}}$

21 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$.

1) Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que cette suite est convergente.
2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = e-(n+1)I_n$.
   b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $u_n = \frac{(-1)^n}{n!} I_n$.
a) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Suites adjacentes, suites extraites

22 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{10^n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, de limite x.

23 Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on pose les suites de réels définies par $u_0 = a, v_0 = b$ et :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, 2\sqrt{xy} \le x+y$.
2) En déduire que : $\forall n \ge 1, u_n \le v_n$.
3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes à partir du rang $n=1$.

24 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2) En déduire que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
3) On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$.
   Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. On note γ leur limite commune (constante d'Euler).

25 Démontrer qu'une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée est convergente.

26 Soit (u_n) une suite telle que $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

27 Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

diverge.

28

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée.Donner un exemple d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne diverge pas vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$.

2) Suites récurrentes

29

1) Donner une expression du terme général de la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

2) Déterminer la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$$

30 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \lambda \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \le 1$$

31 (Pour plus tard) Étudier la suite u définie par $u_0 = -1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.