TD 12 : Matrices et systèmes linéaires

Systèmes linéaires

1 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1) $(S_1) : \begin{cases} 7x+3y=5 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$

2) $(S_3) : \begin{cases} -2x+y+2z=1 \\ 3x-y-3z=0 \\ 3x+4y-2z=-1 \end{cases}$ $(S_2) : \begin{cases} x-y+2z=0 \\ x-2y-3z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$

4) $(S_4) : \begin{cases} -3x+3y-z=0 \\ 4x+2y+5z=4 \\ -x+5y+2z=-2 \end{cases}$

5) $(S_5) : \begin{cases} -5x-4y+3z=-9 \\ 3x+3y-4z=3 \\ -4x-2y-3z=-6 \end{cases}$

2 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1) $(S_1) : \begin{cases} 2x-5y=0 \\ -x+2y-2z=0 \end{cases}$

2) $(S_2) : \begin{cases} x-y+z-t=0 \\ -x+3y-z+t=0 \\ 2x-6y+2z-2t=0 \end{cases}$

3) $(S_3) : \begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ 2y+z=0 \\ -x-2y-z=0 \end{cases}$

4) $(S_4) : \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x+2y+z=0 \\ -x+2y-3z=0 \\ -x-6y+5z=0 \end{cases}$

3 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1) $(S_1) : \begin{cases} x-3y-3z-t=0 \\ y-z+t=0 \\ -2x-2y+z+t=0 \\ 2x+y-2z-t=0 \end{cases}$

2) $(S_2) : \begin{cases} -2x-5y+2z-2t=0 \\ -3x-4y+z+5t=0 \\ x+2y-z+2t=0 \\ 4x-5y+z-4t=0 \end{cases}$

3) $(S_3) : \begin{cases} -x-z-2t=1 \\ 4x+2y+z+t=0 \\ -4x+y+z=-1 \\ -2x-3y+2t=2 \end{cases}$

4 Discuter la résolution des systèmes linéaires suivants selon la valeur de $(\lambda, a, b, c) \in \mathbb{K}^4$:

1) $(S_1) : \begin{cases} \lambda x+3y=6 \\ 7x-7y=a \end{cases}$ (pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$).

2) $(S_2) : \begin{cases} \lambda x-y=a \\ x+\lambda y=b \end{cases}$ (pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ puis $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

3) $(S_3) : \begin{cases} \lambda x+y+z &= a \\ x+\lambda y+z &= b \\ x+y+\lambda z &= c \end{cases}$ (pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$).

5 Pour $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{K}^4$, résoudre le système

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=y_1 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=y_2 \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=y_3 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=y_4. \end{cases}$$

Indication : On pourra s'intéresser à la somme des quatre équations du système $(\mathcal{S})$.

6 Pour chaque système, déterminer l'ensemble des $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ de sorte que le système possède au moins une solution, puis décrire l'ensemble des solutions correspondant.

1) $(S_1) : \begin{cases} -x-y+z=a \\ -3x+2y+3z=b \\ x+3y-z=c \end{cases}$

2) $(S_2) : \begin{cases} x+y-2z+2t=a \\ -2x+2y+2t=b \\ x+y-z=c \\ 2x-2y-z=d \end{cases}$

7 L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère $\mathcal{P}_1$ (respectivement $\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3$) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 : 2x-3y+4z=-3$$
$$\mathcal{P}_2 : -x+2y+z=5$$
$$\mathcal{P}_3 : 4x-5y+14z=1$$

1) Quelle est la nature géométrique de chacun des $\mathcal{P}_i$?

2) Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Quelle est sa nature géométrique ?

Matrices

8 Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB=0$ et $BA\neq 0$.

9 Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Existe-t-il une matrice $B\in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $AB=I_3$? Si oui, donner explicitement une telle matrice B.

2) Existe-t-il une matrice $C\in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $CA=I_2$? Si oui, donner explicitement une telle matrice C.

10 On dit qu'une mat$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $A^p=0$. Démontrer que si $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices nilpotentes telles que $AB=BA$, alors AB et $A+B$ sont nilpotentes.

11 Calculer les inverses des matrices suivantes (s'ils existent) :

1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12

1) Montrer que $A=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un corps.

2) À quel corps usuel A est-il isomorphe ?

13 Trouver toutes les matrices qui commutent avec $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14

1) Montrer que I_3 et $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent.

2) Soit $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme, calculer M^n pour $n\geqslant 2$.

15 On souhaite prouver que la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

1) On note $J = I_4 - A$. Calculer J^2, J^3 et J^4. 2. En écrivant $I_4 = I_4^4 - J^4$, montrer que A est inversible et expliciter son inverse.

16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres. Montrer que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires. Indication. Utiliser les matrices élémentaires.

17 Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$. Montrer que si $ABC = 0$, et si deux des trois matrices sont inversibles, alors la troisième est nulle.

18 Soit $M = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -12 \\ -3 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer M^2 et montrer qu'il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^2 = a_2 M + b_2 I_3$.

2) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^k = a_k M + b_k I_3$.

3) Expliciter le terme général des suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et en déduire l'expression de M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

19 Calculer les inverses des matrices suivantes (s'ils existent) :

1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$;

20 Soient $(a_n), (b_n)$ et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

1) On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.

2) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.

3) Montrer que :

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} nN + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4) En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.