TD 14 : DÉRIVABILITÉ

Dérivées et fonctions de classe C_k, cas pratiques.

1 En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x}$
2) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x}$
3) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$
4) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

2 Donner l'ensemble de définition et étudier la dérivabilité de :

1) $x \mapsto \sqrt{x^2-x^3}$
2) $x \mapsto \left(x^2-1\right)\mathrm{Arccos}\left(x^2\right)$
3) $x \mapsto x|x|$
4) $x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$

3

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux façons la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire une expression de $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$.
2) Calculer la dérivée n-ième de $g : x \mapsto \left(x^2+1\right)e^x$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n-ième de :

$$g : t \mapsto t^{n-1}\ln(t)$$

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ 1-\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ ax+b & \text{si } x<0 \end{cases}$.

1) Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2) Est-elle alors de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geqslant 2$?

6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. Démontrer que $|f|$ est dérivable en x.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

a) Démontrer que si $f'(x) = 0$, alors $|f|$ est dérivable en x.
b) Démontrer que si $f'(x) \neq 0$, alors $|f|$ n'est pas dérivable en x.

Énoncer le théorème démontré.

7 On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$, on a $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}}P_n(1/x)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
2) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

8 Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} (\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})) = 0.$$

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(1) = 0$ et $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ si $x \neq 1$.

1) Étudier la continuité de f.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
3) Montrer que $f'(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 . f est-elle dérivable en 1 ?

Théorèmes généraux

10 Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

11 Soient $n \in \mathbb{N}, (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. Montrer que si pour tout $i \in [\![0, n-1]\!], f^{(i)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$ alors il existe $c \in]a,b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

12 Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x-y|$.
2) $\forall x \geq 0, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$.

13

1) Soit $f \in \mathcal{F}([a;b], \mathbb{R})$, n fois dérivable. Montrer que si f s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a;b]$, alors f' s'annule en au moins n points distincts de $[a;b]$. Que peut-on en conclure sur $f^{(n)}$?
2) En déduire que $f(x) = \frac{x^8}{81} + \frac{x^5}{51} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ n'a pas 8 zéros distincts.

14 Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction

$$h : \begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \tan x. \end{array}$$

15 ★★ (Théorème de Rolle à l'infini). Soit $f \in \mathcal{C}([a;+\infty[, \mathbb{R})$ dérivable sur $]a;+\infty[$, et telle que $f(a) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$. Montrer qu'il existe $c \in]a;+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

16 Règle de l'Hospital (initiation) : Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que :

$$\forall x \in [a,b], g'(x) \neq 0$$

1) Montrer que $g(a) \neq g(b)$.
2) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

17 On note f la fonction définie sur $[1,e]$ par $f(x) = \frac{2x}{\ln(x)+1}$ et g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(y) = \frac{2y}{(1+y)^2}$.

1) Démontrer que, pour tout $y \in [0,1], 0 \leq g(y) \leq \frac{1}{2}$.
2) Étudier f et démontrer que l'intervalle $[1,e]$ est stable par f.
3) Démontrer que, pour tous $x, y \in [1,e], |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ (on pourra utiliser le résultat de la première question).
4) On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $|u_n - e| \leq \frac{e-1}{2^n}$. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?
5) Déterminer un rang n pour lequel u_n est une approximation de e à 10^{-3} près.

18 Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in]0;1], x + \frac{x^3}{3} < \tan(x) < x + \frac{14}{25}x^3$;
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\cos(x) + \frac{x^2}{2} - 1\right| \leqslant |x|^3$.

19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
Montrer que :

$$\forall x > 0, \exists c > 0, f(x) - f(-x) = x\left(f'(c) + f'(-c)\right)$$

20 ★★ À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer :

$$\lim_{x\to+\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$$