# TD 13 : Limites et continuité

## Limites et continuité en un point

**1** On considère la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{-1;1\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

$f$ est-elle prolongeable par continuité en -1 ? Et en 1 ?

**2** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction périodique non constante, montrer que $f$ ne possède pas de limite en $+\infty$.

**3** Étudier les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$ ;
2) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ ;
3) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ;
4) $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ ;
5) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\mathrm{ch}(x)-\cos(x)}{\tan(x)}$ ;
6) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$ ;
7) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$ ;
8) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(e^x)+e^{\sin(x)}+x}{\sqrt{x^2+1}}$ ;
9) $\lim_{x\to 1} \ln(x)\ln(\ln(x))$ ;
10) $\lim_{x\to 1} x+\lfloor x\rfloor$ ;

**4** À l'aide de la définition de la limite d'une fonction, déterminer :

1) $\lim_{x\to 1} x+x^2-x^3$ ;
2) $\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \frac{x-1}{x+2}$ ;
3) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2+1}$ ;
4) $\lim_{x\to+\infty} x^2-x$.

**5** Etudier la continuité en tout point des applications :

1) $f : x \mapsto x-\lfloor x\rfloor-(x-\lfloor x\rfloor)^2$
2) $g : x \mapsto (-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}\right)$
3) $h : x \mapsto \lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$
4) $i : x \mapsto x^2\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$ sur $\mathbb{R}_+^*$

**6** Montrer que la fonction $l_{\mathbb{Q}}$ indicatrice de $\mathbb{Q}$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet de limite en aucun point. On utilisera les densités de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

**7** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

**8** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(x^2\right) = f(x)$$

Montrer que $f$ est constante.

**9** Démontrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0$, alors $|f|$ est continue en $x_0$. Démontrer que la réciproque est fausse.

## Continuité sur un intervalle

**10**

1) Existe-t-il une fonction continue surjective de $[0;1]$ dans $]0;1[$ ?
2) Existe-t-il une fonction continue surjective de $]0;1[$ dans $[0;1]$ ?
3) Montrer qu'une fonction continue surjective de $]0;1[$ dans $[0;1]$ ne peut pas être injective.

**11** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1) On suppose que $f$ admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2) On suppose que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer que $f$ admet un minimum.

**12** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$continue. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $l<1$ en $+\infty$. Démontrer que $f$ admet un point fixe.

**13** Un automobiliste parcourt 200 kilomètres en 2 heures. Montrer qu'il y a un intervalle d'une heure pendant lequel l'automobiliste a parcouru exactement 100 kilomètres.

**14** Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $k$-lipschitzienne avec $k \in [0,1[$ et $f(0) = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$ la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**15** Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $g \circ f = f \circ g$. On veut démontrer qu'il existe un réel $c$ tel que $f(c) = g(c)$. On rappelle que $f$ admet un point fixe $s \in [0,1]$. On définit par récurrence une suite $(u_n)$ par $u_0 = s$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

1) Démontrer que, pour tout $n \geq 0, u_n$ est un point fixe de $f$.
2) On suppose que la suite $(u_n)$ est monotone. Démontrer le résultat.
3) On suppose que la suite $(u_n)$ n'est pas monotone.
   a) Démontrer qu'il existe $u, v \in [0,1]$ tels que $(f-g)(u)\cdot(f-g)(v) \leq 0$.
   b) Conclure.

**16** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

**17** Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée et atteint ses bornes.

**18** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante, montrer que $f$ admet un unique point fixe.

**19** ★★★ (Difficile)

1) Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(a)) = g(g(a))$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = g(b)$.
2) Trouver une bijection de $[0,1]$ dans lui-même qui soit discontinue en tout point.
3) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On suppose que tout $y \in \mathbb{R}$ admet au plus 2 antécédents par $f$. Montrer qu'il existe un réel qui admet un unique antécédent par $f$.