TD 15 : Fonctions convexes de la variable réelle

Défintions et inégalités de convexités

1 En utilisant la définition, montrer que $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est convexe.

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2e^{x-1} - x^2 - x$$

1) Étudier la convexité de f et en déduire qu'elle possède un unique point d'inflexion.
2) En déduire que : $\forall x \geqslant 1, e^{x-1} \geqslant \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$. Que dire si $x \leqslant 1$?

3

1) Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Pourquoi peut-on alors affirmer que cette fonction est concave sur $\mathbb{R}_+$? (*Question à admettre si on bloque*).

Sans étudier de signe de fonction, montrer que : $\forall x \in [0;4], \frac{x}{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}$.

4 Démontrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(\lambda x) \leq \operatorname{ch}(\lambda) + x \operatorname{sh}(\lambda).$$

Applications de Jensen

5 On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(1+e^x)$$

1) Étudier la convexité de f.
2) Montrer que : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, 1+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1+x_k)}$.
3) En déduire que : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n y_k} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (x_k+y_k)}$.

6 **Moyenne arithmético-géométrique** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Prouver l'inégalité suivante :

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Caractérisations et conséquences de la convexité.

7 Soit f une fonction convexe sur I admettant un minimum en $a \in I$. Déterminer les variations de f.

8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable possédant une limite finie en $+\infty$.

1) Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2) Démontrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
3) Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est convexe ?

9 Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

10 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$

11 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ une fonction convexe injective. On pose $J = f(I)$, de sorte que f soit bijective de I dans J.

1) Montrer que f est strictement monotone sur I.

2) Étudier la convexité de f^{-1} sur J.

12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f admet un minimum local en a, alors f admet un minimum global en a. Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?

13 **Inégalité de Hölder et de Minkowski** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) \in \left[1;+\infty\right[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que : $\forall (x,y) \in \left[1;+\infty\right[^2, x \cdot y \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. (Penser à la concavité du logarithme).

2) Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) On suppose que $\sum_{k=1}^n |a_k|^p = \sum_{k=1}^n |b_k|^q = 1$. Montrer que : $\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

b) Montrer que cette formule est encore vraie dans le cas général.

3) En remarquant que : $\forall x \geqslant 0, x^p = x \cdot x^{p-1}$, en déduire que :

$$\forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

14 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on pose $A_b = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant b\}$.

1) On suppose que f est convexe. Montrer que A_b est un intervalle pour tout $b \in \mathbb{R}$.

2) Que dire de la réciproque ?

15 Soit $a < b < c < d$, et soit $f \in \mathcal{F}([a;d],\mathbb{R})$ supposée convexe sur $[a;c]$ et sur $[b;d]$. Montrer que f est convexe sur $[a;d]$.

16 ★★ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ convexe. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.