TD 16 : Relations binaires

Familles et relations binaires générales

1 Expliciter les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

1) $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[1;1+\frac{1}{n}\right[$;
2) $C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-1-\frac{1}{n};3+n\right]$;
3) $E=\bigcup_{x\in]0;1]}\left[-\frac{x}{2};2x\right[$;
4) $B=\bigcap\left[1;1+\frac{1}{n}\right[$
5) $D=\bigcap\left]-1-\frac{1}{n};3+n\right]$;
6) $F=\bigcap_{x\in 10\cdot 1]}\left[-\frac{x}{2};2x\right[$.

2 Soit $A=\mathbb{R}^*_-, B=[0;1[, C=\{1\}$ et $D=]1;+\infty[$. Montrer que (A,B,C,D) forme une partition de $\mathbb{R}$.

3 Soit E un ensemble non vide et A,B deux parties non vides de E. Montrer que (A,B) est une partition de E si et seulement si $B=E\backslash A$.

4 Soit E un ensemble non vide. Étudier les propriétés de la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall (A,B)\in\mathcal{P}(E)^2, A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\cap B\neq\emptyset.$$

5 Soit E et I deux ensembles, et soit $f:E\to I$ une surjection. Pour tout $i\in I$, on pose $A_i=f^{-1}(\{i\})$. Démontrer que $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition de E.

6 ★ Combien y a-t-il de partitions d'un ensemble à $1,2,3$ ou 4 éléments ?

Relations d'équivalences

7 Soit E,F deux ensembles et $f\in\mathcal{F}(E,F)$. On munit E de la relation binaire $\mathcal{R}_f$ suivante :

$$\forall \left(x,x'\right)\in E^2, x\mathcal{R}_f x' \Leftrightarrow f(x)=f\left(x'\right).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence.
2) Décrire la classe d'équivalence $\bar{x}$ d'un élément $x\in E$.
3) Que dire de $\mathcal{R}_f$ si f est injective ?

8 Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{Z}$ de la relation binaire $\mathcal{R}_p$ suivan

$$\forall (m,n)\in\mathbb{Z}^2, m\mathcal{R}_p n \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, m-r$$

1) Montrer que $\mathcal{R}_p$ est une relation d'équivalence.
2) Quelles sont ses classes d'équivalence ?

9 On note $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x|=|y|$$

Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et décrire la classe de x, pour $x\in\mathbb{R}$.

10 ★ On note $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Déterminer les classes d'équivalence.

Relations d'ordre

11 Déterminer, lorsqu'ils existent, le plus grand élément (max), le plus petit élément (min) la borne inférieure (inf) et supérieure (sup) des ensembles suivants dans les ensembles spécifiés :

1) $A=\left\{\frac{1-3n}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\{1\}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel.
2) $B=\left\{ne^{-3n}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel.
3) $C=\{1;2;3;4;5;6\}$ dans $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité.
4) $D=\left\{\frac{1-3n}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\{1\}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel.
5) $E=\left\{ne^{-3n}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel.
6) $F=\{1;2;3;4;5;6\}$ dans $\mathbb{N}$ muni de la divisibilité.

12 Soit E un ensemble, et soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'ordre telles que : $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{S}y$. Montrer que ces deux relations sont les mêmes, i.e. : $\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x\mathcal{S}y$.

13 On munit $\mathbb{N}$ de la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p\mathcal{R}q \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N}^*, q = p^k\right).$$

1) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

2) L'ensemble $\{2;3\}$ a-t-il des majorants ? Admet-il un supremum ?

3) L'ordre est-il total ?

14

1) Montrer que la relation définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(a,b) \preccurlyeq \left(a',b'\right) \Longleftrightarrow \left(a < a' \quad \text{ou} \quad \left(a = a' \quad \text{et} \quad b \leqslant b'\right)\right)$$

est une relation d'ordre (appelée ordre lexicographique).

2) Cet ordre est-il total ou partiel ?

15 Soit E un ensemble non vide, et soit $F = \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur F par

$$\forall (f,g) \in F^2, f\mathcal{R}g \Leftrightarrow (\forall x \in E, f(x) \leqslant g(x)).$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2) A quelle condition nécessaire et suffisante s'agit-il d'un ordre total sur F ?

16 Soient A et B deux parties d'un ensemble ordonné E. On suppose que A et B ont chacune un plus grand élément.

1) Si l'ordre est total, montrer que $A \cup B$ a un plus grand élément.

2) Trouver un contre-exemple quand l'ordre n'est pas total.

3) Reprendre les questions précédentes en prenant $A \cap B$ à la place de $A \cup B$.

17 Montrer que sur $\mathbb{R}^2$, la relation $(a,c) \leqslant (b,d) \Longleftrightarrow (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d)$ définit un ordre partiel.