TD 17 : Arithmétique

1 Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Montrer de deux manières que 7 divise $3^{2n} - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que 10 divise $n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$.
3) Montrer que 11 divise $2^{123} + 3^{121}$.
4) Déterminer le reste de de la division euclidienne de 2^n par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) Déterminer le chiffre des unités de 7^{7^7}.
6) Déterminer l'ensemble des restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 2, 3, 4, 5 et 8 lorsque n parcourt $\mathbb{N}$.

2 Calculer le PGCD de 61542 et 6514 , et déterminer une relation de Bézout entre ces deux entiers.

3 Montrer que le produit $k \in \mathbb{N}$ entiers relatifs consécutifs est divisible par $k!$.

4 Soient $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ avec $ab \neq 0$ et $d = \text{pgcd}(a,b)$. On note (E) l'équation : $ax + by = c$.

1) Montrer que (E) possède une solution si et seulement si $d \mid c$.
2) On note (x_0, y_0) une solution de (E). Donner toutes les solutions de (E) en fonction de x_0, y_0, a, b et d.
3) Application : de combien de façons peut-on obtenir 34 euros avec des pièces de 2 euros et des billets de 5 euros ?

5 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1) $42x + 91y = 8$.
2) $13x + 5y = 4$.
3) $24x + 20y = 36$.
4) $431x - 144y = 7$

6 Déterminer un critère de divisibilité par 11 d'un nombre entier en fonction des chiffres de son écriture en base 10 .

7 Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :

1) $(S_1) : \begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$.
2) $(S_2) : \begin{cases} x + y = 56 \\ x \wedge y = 7 \end{cases}$
3) $(S_3) : \begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$.

8 Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $a + b$ et $a.b$ le sont.

9 Trouver les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$10 \mid n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$$

10 Montrer que la fraction $\frac{12n+1}{30n+2}$ est irréductible pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m^2$.

12 Soient $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que :

$$7 \mid x \text{ et } 7|y \iff 7|x^2 + y^2$$

13 À l'aide de congruences, montrer que pour tout entier naturel n :

1) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$
2) $6 \mid 5n^3 + n$
3) $5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$
4) $9 \mid 4^n - 1 - 3n$

14 On souhaite résoudre le système $(S) : \begin{cases} x & \equiv 3[25] \\ x & \equiv 10[17] \end{cases}$.

1) Montrer que 25 et 17 sont premiers entre eux, et déterminer une relation de Bézout qui les relie.
2) Déterminer une solution particulière x_1 de (S_1) : $\begin{cases} x & \equiv 1[25] \\ x & \equiv 0[17] \end{cases}$ et x_2 de $(S_1) : \begin{cases} x & \equiv 0[25] \\ x & \equiv 1[17] \end{cases}$.
3) En déduire une solution particulière x_0 de (S).

4) Décrire l'ensemble des solutions de (S) à l'aide d'une congruence.

5) À l'aide des questions précédentes, résoudre le système $(S') : \begin{cases} x & \equiv 3[25] \\ x & \equiv 10[17] \\ x & \equiv 7[13] \end{cases}$

15

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

2) Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

16 Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que :

$$24 \mid p^2 - 1$$

17 Soient a et b premiers entre eux. Montrer que ab et $a+b$ sont premiers entre eux.

18 Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} où $n \in \mathbb{N}$.

19

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^k + 1$ est premier, alors k est une puissance de 2 . Si $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, le chiffre des unités de F_n est 7 .

3) Montrer que si $p < n$ alors $F_n \equiv 2\left[F_p\right]$. En déduire que si $p \neq n$ alors F_p et F_n sont premiers entre eux.

4) Montrer que tout entier naturel n qui n'est pas une puissance de 2 possède un diviseur impair autre que 1 .
En déduire que si $n \geqslant 1$ et $2^n + 1$ est premier alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^n + 1 = F_m$.

5) Montrer que $2^{16} \equiv 154\ [641]$. En déduire que F_5 n'est pas premier.

20 ★ Montrer que le nombre de diviseurs positifs de $n \in \mathbb{N}^*$ est impair si et seulement si n est un carré parfait.

21 Soient $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ solutions de $x^3 + y^3 = z^3$.
Montrer que l'un des entiers x, y ou z est divisible par 3 .

22 ★ On note $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs d'un entier $n \in \mathbb{Z}$. Soient a et b premiers entre eux et :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) & \to & \mathrm{Div}(ab) \\ (k, l) & \mapsto & kl \end{array}$$

Montrer que φ est une bijection.

23 ★ Montrer qu'il existe des intervalles de $\mathbb{N}$ de longueur aussi grande que l'on veut qui ne contiennent aucun nombre premier.

24 ★★ Par combien de 0 se termine 1000 ! ? (On pourra déterminer $v_2(1000!)$. et $v_5(1000!)$.