TD 18 : POLYNÔMES

Généralités

- 1) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de :

$$P = (X - 2)^n - (X + 5)^n.$$

- 3) Résoudre les équations suivantes :

<ol style="list-style-type: none"> 1) $Q^2 = XP^2$ 2) $P \circ P = P$ 	<ol style="list-style-type: none"> 3) $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
---	--

Indication : recnemmoC rap renimretéd sel sérged selbissop ruop P te Q .

- 4) On considère la suite de polynômes définie par récurrence par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}, P_{k+1} = (X^2 + 1)P'_k - (2k + 1)XP_k \end{cases}$$

Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_k .

- 5) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer le degré du polynôme $P(X + 1) - P(X)$
- 6) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de :

<ol style="list-style-type: none"> 1) $X^3 + 2X^2 - 4X + 3$ par $X + 3$; 2) $X^5 - 3X^3 + 2X^2 - 1$ par $X^2 - 2$; 	<ol style="list-style-type: none"> 3) $(X + 1)^{n+2} + (X + 2)^n - 2$ par $(X + 1)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
--	---
- 7) Déterminer le reste de la division euclidienne de :
 - 1) X^{50} par $X^2 - 3X + 2$;
 - 2) $(X + \sqrt{3})^{17}$ par $X^2 + 1$

Indication : erircE al noisivid enneidilcue , erircé sel stneiciffeoc tmemelleitnetop non slun ud etser (resilitu el érged) , reulavé al noisivid enneidilcue ne sel senicar ud emônylop ruesivid .

- 8) Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
 - 1) Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
 - 2) Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

- 9) ★ Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ de degré $d > 0$. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $(P_0, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ tel que :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \deg P_i < \deg B \\ A = P_0 + P_1 B + \dots + P_n B^n \end{cases}$$

Indication : iS A tircés ed ettec erènam elleuq tse el etser R ed al noisivid enneidilcue ed A rap B? leuQ tse el etser R_2 al noisivid enneidilcue ed $(A - R)/B$ rap B?

Arithmétiques de polynômes

- 10) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^8 + X^4 + 1$.
- 11) Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$:

<ol style="list-style-type: none"> 1) $P = 3X^3 + 3$ 2) $P = X^4 - 5X^2 + 4$ 3) $P = X^4 + 5X^2 + 6$ 	<ol style="list-style-type: none"> 4) $P = X^4 + X^2 + 1$ 5) $P = X^4 + 1$
--	--
- 12) Soit A, B, C trois polynômes non nuls, avec C unitaire. Montrer

$$(AC) \wedge (BC) = (A \wedge B)C \text{ et } (AC) \vee (BC) = (A \vee B)C.$$
- 13) Factoriser $P = X^6 + 27$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis $\mathbb{C}[X]$.

14 Calculer le PGCD et le PPCM de $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.

15 Déterminer l'ensemble des $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $(X+1)P + (X^2 + 1)Q = 1$.

16 Étant donné des polynômes non constants A et B premiers entre eux, montrer qu'il existe un unique couple de polynômes (U_0, V_0) tel que :

$$AU_0 + BV_0 = 1 \quad \text{avec} \quad \deg U_0 < \deg B \text{ et } \deg V_0 < \deg A$$

17

- 1) Soit $n \geq 1$. Montrer que le polynôme $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple, et déterminer sa multiplicité.
- 2) Déterminer la décomposition en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $Q = 3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.
- 3) Démontrer que Q divise P_n pour tout $n \geq 0$.

18 Soit $P = (X^2 + X + 1)^2$ et, pour tout n entier, $Q_n = (X + 1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

- 1) Déterminer la décomposition en produits de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- 2) Démontrer que P divise Q_n pour tout $n \geq 0$.

19 On définit une suite de polynômes (T_n) par $T_0 = 2, T_1 = X$, et : $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = XT_{n+1} - T_n$.

- 1) Calculer T_2 et T_3 .
- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .
- 3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, T_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
- 4) En déduire une expression simple de $T_n(2 \cos \theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- 5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de T_n .
- 6) En déduire les factorisations de T_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

20 Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $A^2 \mid B^2$. Montrer que $A \mid B$.

Indication : resnep à al noitisopmocéd ne sruetcaf selbitcudérri

21 Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2$ avec $p \wedge q = 1$.

1) Montrer que 1 est la seule racine commune de :

$$X^p - 1 \text{ et } X^q - 1$$

2) En déduire que :

$$(X^p - 1)(X^q - 1) \mid (X - 1)(X^{pq} - 1)$$

Racines et polynôme dérivé

22 Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer $(A \circ B)' = (A' \circ B)B'$.

23 Résoudre $x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda = 0$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, sachant qu'il y a deux solutions x_1 et x_2 vérifiant $x_1 x_2 = 2$. Que peut-on dire de λ ?

24 Soit $n \geq 2$. Appliquer les relations de Viète au polynôme complexe $X^n - 1$ pour calculer la somme et le produit des racines n -ièmes de l'unité.

25 Soit $P = X^4 - 2X^3 + \lambda X^2 + 2X - 1$. Déterminer une condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que P possède une racine réelle au moins triple.

26 Montrer que 2 est racine triple de :

$$P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$$

En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

27 Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que le polynôme P' est également scindé sur $\mathbb{R}$.

Indication 1 : nO arruop resilitu nu niatrec emèroéht ed étilibaviréd

Indication 2 : el emèroéht ed ellor

28 Montrer que si $n \geq 2, P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine multiple.

29

- 1) Que dire d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est périodique ?
- 2) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$$

- 3) Montrer que la fonction sin n'est pas une fonction polynomiale.

Indication : erbmon ed senicar? INIFNI!

30 Déterminer les triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$$

31 Le but de l'exercice est de trouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

- 1) Déterminer les racines carrées de :

$$\frac{\sqrt{3} + i}{2} \text{ et } \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$$

- 2) Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$.
- 3) Factoriser $X^6 - i$ dans $\mathbb{C}[X]$.
- 4) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

32 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que :

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0$$

- 1) Montrer que si a est racine de P alors a^2 l'est aussi.
- 2) En déduire qu'une racine a de P vérifie $a = 0$ ou a racine de l'unité.

33 ★ Déterminer tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Indication : no arruop al elumrof ed rolyat

34

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right).$$

Indication : resneP à noitalopretni'l ed egnargal

35

★★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2$$

Indication 1 : resopmocéd P ne stiudorp ed sruetcaf selbitcudérri

Indication 2 : euQ tuep no erid ed al éticilpitlum sed sruetcaf selbitcudérri ed érged 1 ?

Indication 3 : resopmocéd sel sruetcaf selbitcudérri ed érged 2 snad $\mathbb{C}[X]$.

Indication 4 : renimretéd el engis ud tneiciffeoc tnanimod .