Chapitre 19 : Polynômes

A) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau $\mathbb{K}[X]$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cet anneau est commutatif
- Dégré, coefficient dominant,polynôme unitaire,
- Dégré d'une somme, d'un produit
- Composition de deux polynômes.
- $(\mathbb{K}_n[X], +)$ sous groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$
- $K[X]$ est intègre.

B) Divisibilité

- Définition divisibilité de polynômes, diviseurs, multiples...
- Premières propriétés
- Lien entre divisibilité et degré
- Caractérisation des polynômes associés
- Théorème et algorithme de la division euclidienne

C) Fonction polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme
- Evaluation d'un polynôme (méthode de Horner)
- Racines d'un polynôme
- Lien entre racine d'un polynôme et divisibilité
- Multiplicité d'une racine
- Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré
- Polynôme scindé, relations coefficients racines.

D) Polynôme dérivé

- Définition
- Degré du polnôme dérivé et des dérivées successives
- Opérations sur les polynômes dérivées (somme, produit, Leibniz,...)
- Formule de Taylor
- Lien entre dérivées successives et multiplicité des racines.

E) Arithmétique des polynômes

- PGCD/PPCM
- Premières propriétés
- Algorithme d'Euclide étendu et conséquences
- Polynômes premiers entre eux
- Théorème de Bézout
- Lien avec les racines
- Extension PGCD/PPCM à un nombre fini de polynômes
- Théorème de Gauss

F) Polynômes irréductibles

- Polynômes irréductibles, réductibles, constants
- Deux polynômes irréductibles sont associés ou premiers entre eux.
- Lemme d'Euclide
- Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$
- Décomposition en facteurs irréductibles

G) Interpolation de Lagrange

1) Polynômes de Lagrange et polynôme interpolateurs de Lagrange.

Chapitre 20 : Fractions rationnelles

A) Le corps des fractions rationnelles

1) Définitions et exemples
2) Le corps $\mathbb{K}(X)$
3) Degré d'une fraction rationnelle
4) Partie entière, partie polaire
5) racines et pôles

Questions de cours :

- On prouvera les résultats suivants :
  1) Preuve de la formule de Taylor.
  2) (Caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives). Soit $P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $m \in \mathbb{N}$. λ est racine de P de multiplicité m si et seulement si
  $$\forall k \in [\![0; m-1]\!], P^{(k)}(\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\lambda) \neq 0$$
- On prouvera les résultats suivants :
  1) Preuve théorème d'interpolation de Lagrange
  2) Application : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
  $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right)$$
- On prouvera les résultats suivants :
  1) Montrer que $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.
  2) Monter que $\Phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X), P \mapsto \frac{P}{1}$ est un morphisme d'anneau injectif.
- 1) En utilisant le théorème de d'Alembert Gauss, montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
  2) En déduire le théorème de décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.
- 1) Montrer qu'un polynôme de dégré 2 de $\mathbb{R}[X]$ n'admettant pas de racines est irréductible.
  2) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, $\bar{\alpha}$ est également racine de P de même multiplicité.
  3) En déduire le théorème de décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$