Chapitre 20 : Fractions rationnelles

A) Le corps des fractions rationnelles

- Définitions et exemples
- Le corps $\mathbb{K}(X)$
- Degré d'une fraction rationnelle
- Partie entière, partie polaire
- racines et pôles
- Fonctions rationnelles

B) Décomposition en éléments simples

- Existence et unicité de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Méthodes pour déterminer les coefficients :
- Pour les pôles simples
- Pour les coefficients de dégré maximal pour un pôle multiple
- Méthode sur la parité, sur la limite (sur $\mathbb{R}$),sur l'évaluation en un point précis. (L'identification est à proscrire pour ce chapitre).
- Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$

C) Application de la DES

- Calcul de primitives de fraction rationnelles
- Calcul de dérivée

Chapitre 21 : Analyse asymptotique

A) Relation de domination, négligeabilité et équivalence

- Définitions, lien entre les différentes relations
- Notations $o, O, \sim$.
- Opérations sur la manipulation des relations
- Lien entre les différentes relations et le quotient des deux fonctions comparées.
- Traduction des croissances comparées à l'aide de ses relations
- Obtention d'un équivalent par encadrement
- Conservation du signe de la "non-annulation" et de la limite pour les équivalents.

B) Développements limités (en 0)

- Définition du développement limité en 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.
- Unicité du développement limité.
- Troncature d'un DL à l'ordre n à l'ordre $k \leq n$.
- Utilisation de la parité/imparité des fonctions dans les DL.
- Opérations sur les DL(somme, multiplication par un scalaire, produit et composée).
- Développement limité usuels (non prouvés pour l'instant)
- Méthode de DL pour un quotient (vu en DM)

Questions de cours :

Pour tous les étudiants les développements imités de la feuille des développement limités usuels sont supposés connus.

- Calcul complet d'une primitive/intégrale au choix du colleur impliquant une fraction rationnelle à l'aide de la décomposition en éléments simple.
- Soit $(f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^7$, et soit a $\in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I, on montrera les résultats suivants :
  1) Si $f_1(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ et $f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ alors $f_1(x) + f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.
  2) Si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ alors $f(x)h(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)h(x))$.
  3) Si $f_1(x) = \underset{x\to a}{o}(g_1(x))$ et $f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g_2(x))$ alors $f_1(x)f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g_1(x)g_2(x))$.
  4) Soit $\varphi \in \mathcal{F}(J, I)$ et soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à J. Si $\lim_{x\to b} \varphi(x) = a$ et $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ alors $f \circ \varphi(x) = \underset{x\to b}{o}(g \circ \varphi(x))$.
- On prouvera les résultats suivants :
  1) La relation d'équivalence entre fonctions au voisinage de a est une relation d'équivalence.
  2) Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})^2$, et soit a $\in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I. On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
    a) Si f et g sont à valeurs réelles, alors il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe pour tout $x \in I \cap V$.
    b) Si $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ sif et g à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{C}$ si f et g à valeurs complexes), alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$
- On prouvera les résultats suivants :
  1) L'unicité du développement limité à l'ordre n en 0 lorsqu'il existe.
  2) Lien entre la parité/imparité d'une fonction et les coefficients de son DL à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 lorsqu'elle en admet un.

  Puis on calculera le DL à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 d'un produit de fonctions usuelles au choix du colleur.