

TD 20 : ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Comparaison de fonctions

1 Classer par ordre de négligeabilité les fonctions suivantes au voisinage de 0 puis de $+\infty$:

$$x, x^2, x \ln(x), x(\ln x)^2, \sqrt{x}, \frac{x}{\ln(x)}, e^x$$

2 Déterminer un équivalent simple de ces fonctions au point indiqué :

- | | |
|---|---|
| 1) $x \mapsto -4x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 12x^2$ en $0, +\infty, -\infty$; | 7) $x \mapsto x \ln(1+x) - (x+1) \ln(x)$ en $+\infty$; |
| 2) $\frac{3x^2-5x}{2x-1}$ en $0, +\infty, -\infty$; | 8) $x \mapsto (x^3+x)^{\frac{1}{3}} - (x^3-x)^{\frac{1}{3}}$ en $+\infty$; |
| 3) $x^2 e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$ et 0 ; | 9) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ en 1 ; |
| 4) $x \mapsto \frac{\sqrt{\sin(x)}}{e^x-1}$ en 0 ; | 10) $x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{1-\ln(x^2)}$ en 0 ; |
| 5) $x \mapsto \frac{\ln(2x^2+x+1)}{\ln(2x+3)}$ en $+\infty$; | 11) $x \mapsto \tan(x)$ en $\frac{\pi}{2}$; |
| 6) $x \mapsto \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)$ en $+\infty$; | 12) $x \mapsto e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}$ en $+\infty$. |

3

- 1) Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}_+^*)^2$, et soit $a \in \bar{R}$ adhérent à I . On suppose que $f \sim_a g$.
- On suppose de plus que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}} \setminus \{1\}$. Montrer que $\ln f \sim_a \ln g$.
 - Est-ce encore vrai si $\ell = 1$?
- 2) a) Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a ou de $a = \pm\infty$. Montrer que $e^f \sim_a e^g \iff \lim_a (f - g) = 0$.
- b) A-t-on $f \sim_a g \implies e^f \sim_a e^g$?

Développements limités

4 (DLs simples). Déterminer le développement limité en 0 de ces fonctions à l'ordre indiqué :

- | | |
|---|--|
| 1) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, ordre 4 ; | 5) $x \mapsto \sin^2(x)$, ordre 6 ; |
| 2) $x \mapsto \sqrt{x+2}$, ordre 3 ; | 6) $x \mapsto \frac{1}{x+2}$, ordre 5 ; |
| 3) $x \mapsto \sqrt{3+\cos(x)}$, ordre 2 ; | 7) $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$, ordre 4 . |
| 4) $x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$, ordre | |

5 (DLs techniques). Déterminer le développement limité en 0 de ces fonctions à l'ordre indiqué :

- | | |
|---|--|
| 1) $x \mapsto e^{x \frac{\sin(x)}{x}}$, ordre 3 ; | 9) $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{1-\cos(x)}$, ordre 4 ; |
| 2) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$, ordre 4 ; | 10) $x \mapsto (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, ordre 3 ; |
| 3) $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$, ordre 4 ; | 11) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ordre 6 ; |
| 4) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1-x}$, ordre 3 ; | 12) $x \mapsto \ln(1+x - \text{Arctan}(x))$, |
| 5) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$, ordre 2 ; | 13) $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$, ordre 3 ; |
| 6) $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, ordre 2 ; | 14) $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$, ordre 7 ; ordre 6 ; |
| 7) $x \mapsto \sin(\sin(x))$, ordre 5 ; | 15) $x \mapsto \frac{1}{x} \ln(\cos \sqrt{x})$, ordre 2 |
| 8) $x \mapsto \frac{1}{e^x+\cos(x)}$, ordre 3 ; | |

6 Déterminer le développement limité des fonctions suivantes au point et à l'ordre indiqués :

- | | |
|---|--|
| 1) $x \mapsto \frac{1}{x}$, ordre 3 en 1 ; | en 1 ; |
| 2) $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, ordre 3 en 1 ; | 5) $\cos$, ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$; |
| 3) $x \mapsto (e^x - e) \text{sh}(x)$, ordre 3 | 6) $x \mapsto \ln(\sin(x))$, ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$; |
| 4) $x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$, ordre 3 en 1 ; | 7) Arctan , ordre 2 en 1. |

7 ★ Soit f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par :

$$\forall x \in] -1; 1[, f(x) = e^x - a \cos(x) + b \ln(1+x) + \frac{c}{1+x} + d \sqrt{1-x}.$$

Déterminer les réels a, b, c, d de sorte que $f(x) = o(x^n)$ avec n le plus grand possible au voisinage de 0.

Applications et compléments

8 Déterminer les limites suivantes à l'aide d'un équivalent ou d'un développement limité :

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^2};$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln(x);$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x;$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2};$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1};$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{\tan(2x)};$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)};$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos(x)) \tan(x)}{x \sin^2 x};$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right);$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \ln(\ln(\tan(x))).$ |

9 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{n}}$.

- Déterminer $A \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| f_n(x) - 1 - \frac{1}{n} \ln(1+x^2) \right| \leq \frac{A}{n^2}$.
- En déduire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}} dx = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

10 Déterminer un développement asymptotique à 3 termes des fonctions suivantes en $+\infty$:

- | | |
|---|--|
| 1) $x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}};$ | 4) $x \mapsto \sqrt{x^2+3x+2} - x$ |
| 2) $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x+1}};$ | 5) $x \mapsto x^2 e^{\frac{x}{x^2-1}};$ |
| 3) $x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln x);$ | 6) $x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}.$ |

11

1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

2) Soit I un intervalle centré en 0, et soit f et g deux fonctions de classe C^3 sur I , impaires, avec $g^{(3)}(0) \neq 0$. Déterminer :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - 3f(3x) + 2f(4x)}{g(x) - 3g(3x) + 2g(4x)}$$

12 Si $a \in \mathbb{R}^*$, on considère $f_a(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$. Pour quelles valeurs de a la fonction f_a admet-elle un point d'inflexion en 0 ?

13 Procéder à l'étude locale (existence d'une tangente ou d'une asymptote, position relative de la courbe par rapport à cette tangente ou asymptote) des fonctions suivantes au point indiqué :

- $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ au voisinage de 0;
- $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0;
- $x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ au voisinage de $+\infty$;
- $x \mapsto 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ au voisinage de
- $x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x^2-1}$ au voisinage de 0, 1 et $+\infty$.

14 Procéder à l'étude locale (existence d'une tangente ou d'une asymptote, position relative de la courbe par rapport à cette tangente ou asymptote) des fonctions suivantes au point indiqué :

- $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ au voisinage de 0;
- $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ au voisinage de 0;
- $x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$ au voisinage de $+\infty$;
- $x \mapsto 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ au voisinage de
- $x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x^2-1}$ au voisinage de 0, 1 et $+\infty$.

Comparaisons de suites

15 Donner un équivalent simple et comparer les suites suivantes en utilisant la (ou les) bonnes relations :

- 1) $u_n = n^2 + 3n - 4$ et $v_n = 5(n+3)^2 - 1$;
- 2) $u_n = (n+1)^3 - (n-1)^3$ et $v_n = (3n+2)(2n-3)$;
- 3) $u_n = e^{n+3}$ et $v_n = e^{n-2}$;
- 4) $u_n = e^{3n-2}$ et $v_n = e^{2n-3}$;
- 5) $u_n = \ln(n+3)$ et $v_n = \ln(n-2)$;
- 6) $u_n = \ln(3n-2)$ et $v_n = \ln(2n-3)$;
- 7) $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n}$;
- 8) $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ et $v_n = e^{an}$.

16 Étudier les limites des suites de terme général suivant à l'aide d'équivalents :

- | | |
|---|--|
| 1) $u_n = n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$; | 4) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-2n+1}}$ |
| 2) $w_n = n^n \left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} \right)$; | 5) $b_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2}$; |
| 3) $v_n = \frac{n}{\sin \frac{1}{n}} - \frac{n}{\tan \frac{1}{n}}$; | 6) $c_n = n^{\frac{1}{n}}$. |

17 ★ Montrer que

$$\sum_{k=1}^n k! \sim_{+\infty} n!.$$