Chapitre 22 : Espaces vectoriels (1)

A) Premières définitions

- Loi externe
- Définition espace vectoriel, et caractérisation équivalentes
- Espaces vectoriels usuels
- Produit d'espaces vectoriels
- Règles de calcules (pour les neutres et opposés) dans un espace vectoriels
- Combinaison linéaire d'éléments d'un espace vectoriel et stabilité des espaces vectoriels par combinaisons linéaires (finies). Famille presque nulles.

B) Sous-espaces vectoriels

- Définition et caractérisation
- Exemples usuels de Sous-espaces vectoriels.
- Sous espace vectioriel engendré par une partie ou une famille (et opérations sur ces espaces).
- Droite et plans vectoriels.
- Modification d'une famille de vecteurs laissant stable son espace vectoriel engendré.
- Intersection de sous espaces vectoriels.

C) Somme de 2 sous espaces vectoriels.

- définition de $F+G$ comme $(F\cup G)$ et première caractérisation.
- Ecriture des vecteurs de $F+G$ comme somme (pas forcément unique) d'un élément de F et d'un élément de G.
- Sous-espaces vectoriels en somme directe
- Caractérisation de la somme directe par intersection
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires
- Caracatérisation du supplémentaire par écriture comme somme ou par l'intersection
- Exemples

C) Familles libres, génératrices et bases

- Def famille libres génératrices et bases
- Définition familles liées
- Un famille est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres
- sous-famille d'une famille libre, sur-famille d'une famille liée ou génératrice
- Famille augmentée d'un vecteur d'une famille libre
- Toute famille de $p+1\in\mathbb{N}$ vecteurs engendrée par p vecteurs est liée
- Existence et unicité de la décomposition dans une abse
- Coordonnées dans une base
- Bases canoniques
- Famille de polynômes échelonnés en degré.

Chapitre 23 : Dimension finie

A) Espaces vectoriels de dimension finie

- Définition par existence d'une fmaille génératrice finie
- Familles libres et génératrices en dim finie
- Une famille libre en dim finie est finie, une famille génératrice admet une sous-famille génératrice
- Existence de base en dimension finie
- Lemme de la base incomplète
- Théorème de la base incomplète
- Théorème de la base extrait

B) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont même cardinal, c'est la dimensiun de l'espace.
- Caractérisation des espaces vectoriels de dimension $0, 1$ et 2.

- Famille libres et génératrices en dimension finie(2)
- Lien entre le cardinal d'une famille libre, liée, génératrice, base en fonction du cardinal.
- Pour une famille de cardinal dim(E), être libre est équivalent à être générateur, est équivalent à être une base.
- Rang d'une famille de vecteurs
- Invariance du rang d'une famille de vecteurs par "opérations élémentaires" (addition d'un vecteur à un autre, multiplication par un scalaire d'run vecteur, échange de 2 vecteurs, suppression de vecteurs combinaisons linaires d'autres vecteurs de la famille.
- Produit d'espaces vectoriels de dimension finie

C) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

  - Dimension d'un sous-espace vectoriel
  - Bases adaptées à un sous-espace vectoriel
  - Somme de sous-espaces vectoriels
  - Caractérisation somme directe et supplémentaires en dimension finie
  - Existence d'un supplémentaire en dimension finie
  - Base adaptée à un supplémentaire en dimension finie (vu Lundi)

Questions de cours :

- Preuve du résultat suivant : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $\left(x_1, \ldots, x_{p+1}\right) \in E^{p+1}$. Si $x_1, \ldots, x_{p+1}$ sont combinaison linéaires de p mêmes vecteurs $\left(y_1, \ldots, y_p\right) \in E^p$, alors la famille $\left(x_1, \ldots, x_{p+1}\right)$ est liée.
- On prouvera les deux résultats suivants :
  1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E est finie.
  2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour toute famille génératrice G de E, il existe une sous-famille $G' \subset G$ finie et encore génératrice de E.
- Preuve du lemme et théorème de la base incomplète et preuve du théorème de la base extraite.
- Preuve de la formule de Grassman