

Chapitre 1 : Sommes et produits

A) Prélude aux ensembles :

- Définition principale, Exemples
- Produit Cartésien, définition, exemples
- Familles d'éléments d'un ensemble

B) Sommes simples

- Définitions générales
- Exemples généraux/fondamentaux : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ (Preuve par récurrence), $\sum_{k=0}^n x^k$ où $x \in \mathbb{K}$
- Premières propriétés : Chasles, Linéarité.
- Exemples d'utilisation de Chasles+Linéarité : $\sum_{k=1}^n \min(k, n)$ (Chasles), $\sum_{k=1}^n n(k+1)^2$ (Linéarité)
- Focus sur la parité : relation de Chasles pair/impair (Calcul de $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$).
- Changement d'indice : décalage, renversement, principe et méthode, Application à $\sum_{k=1}^n k$ (cf Gauss)
- Application au télescopage (Preuve intuitive+ Preuve du télescopage par changement d'indice).
- Application du télescopage : Formule de factorisation de $a^n - b^n$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Astuce : Ajouter 0, Multiplier par 1 (technique du +1-1)

C) Sommes doubles :

- Sommes rectangulaires, sommes triangulaires
- Exemples classiques : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
- Produit de sommes finies

D) Produits et factorielles :

- Définition, Propriétés de base ($\prod_{i=1}^n \lambda a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i b_i$, relation de Chasles, produit vide...)
- Définition+Propriété factorielle.
- Télescopage
- Utilisation du logarithme pour transformer un produit en somme.

E) Coefficients binomiaux :

- Définition, $k < 0, k > n$
- Premières propriétés : premiers termes, formule de symétrie, formule de factorisation (non prouvée)
- Additivité/formule de Pascal (preuve en détail avec les différents cas selon la valeur de $k < -1, k = -1, k = n+1, k > n, 0 \leq k \leq n$).
- Théorème du binôme de Newton + preuve+exemples

Chapitre 2 : Logique et raisonnements

A) Rudiments de logiques :

- Propositions : Définitions et premiers exemples
- Négation : Définition et premières tables de vérité
- Conjonctions et Disjonctions : Définitions et tables de vérités
- Implications et équivalences : Définitions, tables de vérités, Exemples, Conditions nécessaires, suffisantes
- Propriétés/règles de calcul : Idempotence, Associativité, Distributivité, Loi de De Morgan, $P \Rightarrow Q \sim \text{non } P \text{ ou } Q$, Négation d'une implication, double implication, contraposition ...

B) Prédicats et quantificateurs :

- Définitions : Prédicats, Quantificateur universel, d'existence, d'unicité.
- Négation des quantificateurs, permutation des quantificateurs de même nature, non permutation en général du $\forall$ et du $\exists$.
- Raisonnement avec des quantificateurs

C) Modes de raisonnement :

- Principe de déduction (Modus ponens)
- Disjonction de cas

- Preuve implication/ équivalences
- Preuve par contraposition
- Raisonnement par l'absurde
- Analyse-synthèse : Exemple phare : Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Récurrence simple : Propriété de bon ordre de $\mathbb{N}$
- Applications : Théorème de récurrence simple, récurrence double, récurrence forte

Questions de cours :

- Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme unique d'une fonction paire et d'une fonction impaire (par analyse-synthèse).
- Preuve de la factorisation de $a^n - b^n$ (pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$)
- Preuve de la formule de Pascal/additivité sur les coefficients binomiaux en distinguant $k < -1, k = -1, 0 \leq k \leq n-1$, on admettra les autres cas.
- Preuve du théorème de récurrence à l'aide de l'axiome : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.
- Preuve du binôme de Newton.
- Preuve du calcul de $\sum_{k=1}^n k^2$ par récurrence et de $\sum_{k=1}^n k$ par changement d'indice.