Thomas Masanet

I Questions préliminaires

Exercice 1

Questions de cours

1) a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$.

b) $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| > \varepsilon$.

c) $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$.

2) a) $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.

b) $\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

c) $f(X) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$.

d) $f^{-1}(Y) = \{x \in E, f(x) \in Y\}$.

3) On raisonne par double implication :
($\Rightarrow$) On suppose que $Im(f) = G^{'}$. Soit $y \in G^{'}$, on a alors que $y \in Im(f)$ donc il existe $x \in E, f(x) = y$. f est donc surjective.
($\Leftarrow$) On suppose f surjective. Par définition de l'image de f, on a toujours que $Im(f) \subset G^{'}$.
De plus, soit $y \in G^{'}$, comme f est surjective, il existe $x \in E, y = f(x)$. Donc $y \in Im(f)$. Donc $G^{'} \subset Im(f)$, ce qui montre, par double inclusion, l'égalité des deux ensembles.

4) Cette suite est une suite arithmético-géométrique. Pour trouver son terme général, on commence par résoudre l'équation $5l + 2 = l$, qui donne $l = -\frac{1}{2}$.
On pose alors (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - l$. On a que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \cdots = 5v_n$. (v_n) est donc une suite géométrique de raison 5. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5^n v_0 = 5^n \frac{3}{2}$.
On a alors immédiatement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5^n \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

Exercice 2

1) a) On raisonne par double inclusion.
($\subset$) Soit $x \in f^{-1}(\overline{B})$. On a alors que $f(x) \in \overline{B}$. Donc $f(x) \notin B$ donc $x \notin f^{-1}(B)$. Donc $x \in \overline{f^{-1}(B)}$.
($\supset$) Soit $x \in \overline{f^{-1}(B)}$, on a donc que $f(x) \notin B$ donc $f(x) \in \bar{B}$ donc $x \in f^{-1}(\bar{B})$.
D'où l'égalité demandée.

b) On va prouver que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$.
Supposons que f est injective.
Prouvons $ii)$ par double inclusion.
Soit donc $(A,B) \in P(E)^2$.
Si $y \in f(A \cap B), \exists x \in A \cap B, y = f(x)$ Donc $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$ (Remarque : pour ce sens, on a même pas besoin de l'injectivité).
Maintenant, si $y \in f(A) \cap f(B)$, il existe $x_1 \in A, y = f(x_1)$ et il existe $x_2 \in B, y = f(x_2)$. Or f est injective donc $x_1 = x_2 \in A \cap B$. Donc $y \in f(A \cap B)$.
D'où l'égalité par double inclusion.
On suppose maintenant que $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ et on veut montrer $iii)$.
Soit $A \subset E$, $f(A) \cap f(\bar{A}) = f(A \cap \bar{A}) = f(\emptyset) = \emptyset$. Ceci montre donc que tout élement de $f(\bar{A})$ n'est pas dans $f(A)$ et est donc dans $F \backslash f(A)$. D'où l'inclusion demandée.
Enfin, on suppose $iii)$ et on veut prouver l'injectivité de f.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 \neq x_2$, on a donc que $x_2 \in E \backslash \{x_1\}$ donc par $iii)$, $x_2 \in F \backslash f(\{x_1\}) = F \backslash \{f(x_1)\}$.
Ceci n'est pas possible car $f(x_1) = f(x_2)$. Donc $x_1 = x_2$ et f est injective.

c) On se rappelle que pour donner un contre-exemple, il suffit de donner l'exemple le plus simple possible.
Posons $f : E = \{0,1\} \to F = \{0\}, x \mapsto 0$.
Pour $A = \{0\}$, on a que $f(E \backslash A) = f(\{1\}) = \{0\} \neq F \backslash f(A)$.

2) a) Il suffit de montrer que Z^2 est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour la loi $+$, est stable par multiplication et que $(1,1) \in \mathbb{Z}^2$.

b) Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}^2$ sont les éléments $(x,y) \in Z^2, \exists (z,t) \in \mathbb{Z}^2 (xz, yt) = (1,1)$. Les possibilités pour x et z sont donc 1 et 1 ou -1 et -1 et de même pour y et t.Les éléments inversibles sont donc les $(1,1)$,$(1,-1)$,$(-1,1)$ et $(-1,-1)$.

c) Soit $((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{Z}^2)^2$, on a que $f(a,b) + f(c,d) = (a+c, 0) = f(a+c, b+d)$ donc f est un morphisme de groupe.

d)

$$\begin{aligned}\ker(f) &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, f(x,y) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, (x,0) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2, x = 0\}\end{aligned}$$

Comme $\ker f \neq \{(0,0)\}$, f n'est pas injective.
On détermine assez facilement que $Im(f) = \{(x,0), x \in \mathbb{Z}\}$.
Comme $Im(f) \neq E, f$ n'est pas surjective.

e) f vérifie toutes les propriétés d'un morphisme d'anneau sauf une : $f(1,1) \neq (1,1)$. Donc f n'est pas un morphisme d'anneau.

Exercice 3

Partie I

1) a) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, on a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \geqslant 0$$
$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leqslant 0$$
$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}$$

Ainsi, la suite (S_{2n}) est croissante, la suite (S_{2n+1}) est décroissante et la distance ($S_{2n+1} - S_{2n}$) est convergente de limite nulle. Par définition, ceci revient à dire que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b) D'après le Théorème de convergence des suites adjacentes, il en résulte que les suites extraites de (S_n) formées des termes de rangs pairs et des termes de rangs impairs sont convergentes et de même limite ℓ. Par complémentarité, il en résulte que (S_n) est aussi convergente de limite $\ell = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

c) D'après le corollaire sur les suites adjacentes, on a pour tout couple $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ l'encadrement

$$S_{2p} \leqslant \ell \leqslant S_{2q+1}$$

Pour conclure, discutons suivant la parité du rang $n \in \mathbf{N}$: - si $n = 2p$ est un entier pair, appliquons l'encadrement ci-dessus, avec $q = p$, il vient :

$$S_n \leqslant \ell \leqslant S_{n+1}$$

D'où l'on tire que

$$0 \leqslant \ell - S_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

- si $n = 2q+1$ est un entier impair, appliquons l'encadrement ci-dessus, avec $p = q+1$, il vient :

$$S_{n+1} \leqslant \ell \leqslant S_n$$

D'où l'on tire que

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \ell - S_n \leqslant 0$$

Dans tous les cas, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$,

$$|S_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

2) a) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, notons

$$I_{2n} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad P_{2n} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k}$$

Ainsi,

$$S_{2n} = I_{2n} - P_{2n}$$
$$H_{2n} = I_{2n} + P_{2n}$$

Il en résulte aisément que $I_{2n} = \frac{1}{2}\left[S_{2n} + H_{2n}\right]$. D'autre part, un changement d'indice donne :

$$P_{2n} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} H_n$$

Finalement,

$$S_{2n} = I_{2n} - P_{2n} = \frac{1}{2} S_{2n} + \frac{1}{2} H_{2n} - \frac{1}{2} H_n$$

D'où l'on tire

$$S_{2n} = H_{2n} - H_n$$

b) On utilise l'expression donnée pour H_n en début d'énoncé et on obtient alors :

$$S_{2n} = \ln(2n) + \gamma - \ln n - \gamma + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) = \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n)$$

Par unicité de la limite, il en résulte que $\ell = \ln 2$.

Partie II

1) Pour montrer que la suite est bien définie, il suffit de dire que $\mathbb{R}$ est stable par f et que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) On montre aisément que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$ est croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. De plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et f positive sur $[0,1]$

3) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$0 < u_n < \frac{1}{n+1}$" - $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a $f(]0,1[) =]0, \frac{1}{4}]$ donc $0 < u_1 = f(u_0) \leqslant \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie - On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ? On a $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ et f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{n+1}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Donc $0 < u_{n+1} \leqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Or $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2(n+2)} < \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{1}{n+2}$. Ainsi $0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$. Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie - Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ est vraie Par ailleurs, on a $0 < u_0 < 1$, donc on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$. Par convergence par encadrement, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

4) a) $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_n(1-u_n) - nu_n = u_n(1-(n+1)u_n) > 0$ d'après le 3). Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Toujours d'après le 3), on a : $0 \leqslant v_n < 1$ Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 . Donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente De plus sa limite L vérifie : $v_1 \leqslant L \leqslant 1$ et donc $L \in]0,1]$.

c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. On a : $w_n = v_n(1 - u_n - v_n)$ qui est le produit de suites convergentes vers L et $1-L$. Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L(1-L)$.

d) Si $L \neq 1$ donc $L < 1, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif $L(1-L)$. Donc cette suite est minorée par $\frac{L(1-L)}{2}$ à partir d'un certain rang n_0 On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}$. Pour $n > n_0$, on a $v_n = v_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \geqslant v_{n_0} + \frac{L(1-L)}{2}\left(H_{n-1} - H_{n_0}\right)$ Aussi, par divergence par minoration, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

5) Cette divergence vers $+\infty$ étant incompatible avec la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers L, on a une contradiction avec l'hy pothèse $L \neq 1$. On a donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 i.e. $\lim_{n\to+\infty} nu_n = 1$

Exercice 4

1) Les parties A et B sont non vides, majorées et incluses dans $\mathbb{R}$, d'après la propriété de la borne supérieure $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent. Par définition de la borne supérieure, on a :
$$\forall b \in B, b \leq \sup(B)$$
Comme $A \subset B$, on a en particulier :
$$\forall a \in A, a \leq \sup(B)$$
Par passage à la borne supérieure, on obtient bien : $\sup(A) \leq \sup(B)$.
$$\text{si } A \subset B \text{ alors } \sup(A) \leq \sup(B)$$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : - $E_n \subset \mathbb{R}$ - E_n est non vide car $u_n \in E_n$ par définition de E_n - E_n est majoré et minoré car (u_n) est bornée D'après les propriétés de la borne inférieure et de la borne supérieure, cela suffit à affirmer que E_n possède une borne supérieure et une borne inférieure.
$$\sup(E_n) \text{ et } \inf(E_n) \text{ existent}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a clairement $E_{n+1} \subset E_n$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $(k \geq n+1) \Rightarrow (k \geq n)$. D'après la question 1, qui s'applique car pour tout $n \in \mathbb{N}, E_n$ est non vide et majoré, on a $\sup(E_{n+1}) \leq \sup(E_n)$. C'est-à-dire $s_{n+1} \leq s_n$. (s_n) est décroissante En utilisant la même démarche que dans la question 1, on démontre que si $A \subset B$ avec A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et minorées alors $\inf(A) \geq \inf(B)$. Dans notre contexte, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_{n+1} \geq i_n$.

c) Par hypothèse, la suite (u_n) est bornée, ainsi il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$. D'autre part, par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n$ est un majorant de E_n, c'est-à-dire que :
$$\forall k \geq n, u_k \leq s_n$$
En particulier la suite (s_n) est minorée par m. La suite (s_n) est décroissante et minorée par m, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, i_n est un minorant de E_n donc :
$$\forall k \geq n, M \geq u_k \geq i_n$$
La suite (i_n) est croissante et majorée par M, elle converge. (s_n) et (i_n) convergent

3) a) Si la suite (u_n) est constante égale à 0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \{0\}$ et $s_n = i_n = 0$. Dans ce cas $L_s = L_i = 0$.
$$L_s = L_i = 0$$

b) Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \{-1, 1\}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n = 1$ et $i_n = -1$ ainsi :
$$L_s = 1 \text{ et } L_i = -1$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \left\{\frac{1}{k+1}, k \geq n\right\}$. On a : - La borne supérieure de E_n vaut $\frac{1}{n+1}$ car c'est le maximum de E_n. - La borne inférieure de E_n vaut 0 . En effet : - 0 est un minorant de E_n - Pour tout $\varepsilon > 0, 0 + \varepsilon$ n'est plus un minorant car d'après la définition de la limite :
$$\exists N \geq n, \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$
Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{1}{n+1}$ et $i_n = 0$, on en déduit que :
$$L_s = L_i = 0$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la borne supérieure de E_n est en particulier un majorant de E_n et la borne inférieure de E_n est un minorant de E_n. Ainsi :

$$\forall k \geq n, i_n \leq u_k \leq s_n$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, i_n \leq u_n \leq s_n$$

On a $\lim_{n\to+\infty} i_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$ car $L_i = L_s$, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = L_i$.

$$(u_n) \text{ converge}$$

5) En reprenant la démarche de la question précédente, on a :

$$\forall k \geq n, i_n \leq u_k \leq s_n$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, i_n \leq u_{\varphi(n)} \leq s_n$$

On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient :

$$L_i \leq \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \leq L_s$$

6) Soit $\varepsilon > 0$, par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire : $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$. Par passage à la borne supérieure et à la borne inférieure, il vient :

$$\forall n \geq n_0, l - \varepsilon \leq i_n \leq s_n \leq l + \varepsilon$$

On a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |i_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } |s_n - l| \leq \varepsilon$$

C'est-à-dire que (i_n) tend vers l et (s_n) tend vers l, par unicité de la limite :

$$L_i = L_s = l$$

7) On va construire l'extractrice φ par récurrence forte. - On pose $\varphi(0) = 0$. - Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, supposons avoir défini $\varphi(k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. On considère $E_{\varphi(n-1)+1} = \{u_k, k \geq \varphi(n-1)+1\}$, par définition de la borne supérieure de cet ensemble, il existe $p \geq \varphi(n-1)+1$ tel que :

$$s_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq u_p \leq s_{\varphi(n-1)+1}$$

ceci puisque $s_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $E_{\varphi(n-1)+1}$ et $s_{\varphi(n-1)+1}$ est un majorant de $E_{\varphi(n-1)+1}$. On pose $\varphi(n) =$. Par construction, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) > \varphi(n-1)$ donc φ est strictement croissante. D'autre part, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq s_{\varphi(n-1)+1}$$

Par passage à la limite, d'après le théorème d'encadrement, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = L_s$.

$$\left(u_{\varphi(n)}\right) \text{ tend vers } L_s$$

8) C'est le théorème de Bolzano Weierstrass.

Exercice 5

Partie I

1) a) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}(ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 &= a^2c^2 + 4abcd + 4b^2d^2 - 2\left(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2\right) \\ &= a^2c^2 + 4b^2d^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\left(a^2 - 2b^2\right)\left(c^2 - 2d^2\right) = a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 + 4b^2d^2$$

Ainsi, on a bien :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad (ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 = \left(a^2 - 2b^2\right)\left(c^2 - 2d^2\right)$$

b) Soient $(a, b), (c, d) \in G$. Montrons que $(a, b) \star (c, d) \in G$. Par définition de $\star$, on a :

$$(a, b) \star (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

car toute somme ou produit d'entiers est un entier. D'après la question précédente, on a de plus :

$$(ac+2bd)^2 - 2(ad+bc)^2 = \left(a^2 - 2b^2\right)\left(c^2 - 2d^2\right) = 1 \times 1 = 1$$

car (a, b) et (c, d) sont des éléments de G. Ainsi, $(a, b) \star (c, d) \in G$. On peut donc conclure que : $\star$ est une loi de composition interne sur G

2) Soient $(a,b),(c,d),(e,f)\in G$. - On a :

$$(c,d)\star(a,b)=(ca+2db,da+cb)=(ac+2bd,ad+bc)$$

par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Ainsi : la loi $\star$ est commutative - De plus, on a d'une part :

$$\begin{aligned}((a,b)\star(c,d))\star(e,f)&=(ac+2bd,ad+bc)\star(e,f)\\&=((ac+2bd)e+2(ad+bc)f,(ac+2bd)f+(ad+bc)e)\\&=(ace+2bde+2adf+2bcf,acf+2bdf+ade+bce)\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}(a,b)\star((c,d)\star(e,f))&=(a,b)\star(ce+2df,cf+de)\\&=(a(ce+2df)+2b(cf+de),a(cf+de)+b(ce+2df))\\&=(ace+2adf+2bcf+2bde,acf+ade+bce+2bdf)\\&=((a,b)\star(c,d))\star(e,f)\end{aligned}$$

On en déduit que : la loi $\star$ est associative

3) Remarquons que le couple $(1,0)$ appartient à G car $(1,0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et $1^2-2\times0^2=1$. De plus, pour tout $(a,b)\in G$, on a :

$$(a,b)\star(1,0)=(a\times1+2b\times0,a\times0+b\times1)=(a,b),$$

et, comme le magma $(G,\star)$ est commutatif, on a aussi $(1,0)\star(a,b)=(a,b)$. Ainsi : le magma $(G,\star)$ admet le couple $(1,0)$ comme élément neutre

4) Soit $(a,b)\in G$. On a :

$$(a,b)\star(a,-b)=\left(a^2-2b^2,a\times(-b)+b\times a\right)=(1,0)$$

car $a^2-2b^2=1$ puisque $(a,b)\in G$. Ainsi :

$$\forall(a,b)\in G,\quad(a,b)\star(a,-b)=(1,0)$$

5) Tout d'abord, l'ensemble G est non vide (car il contient $(1,0)$). Ensuite : - la loi $\star$ est associative et commutative dans G ; - on sait que le magma $(G,\star$) admet un élément neutre (à savoir $(1,0)$) ; - enfin, d'après la question précédente, tout élément de G est inversible pour la loi $\star$. En effet, pour tout $(a,b)\in G$: - on a bien $(a,-b)\in G$ car $a^2-2(-b)^2=a^2-2b^2=1$; - et la relation $(a,b)\star(a,-b)=(1,0)$ établie à la question précédente entraîne que $(a,-b)\star(a,b)=(1,0)$ par commutativité de la loi.
On peut donc conclure que : $(G,\star)$ est un groupe abélien

<u>Partie II</u>

6) a) Soit $b\in\mathbb{Z}$. On a :

$$(1,b)\in G\iff1^2-2b^2=1\iff b^2=0\iff b=0$$

donc : le seul élément de G de la forme $(1,b)$ (où $b\in\mathbb{Z}$) est l'élément neutre $(1,0)$

b) Soit $b\in\mathbb{Z}$. On a :

$$(2,b)\in G\iff4-2b^2=1\iff2b^2=3,$$

ce qui n'est pas possible car 3 n'est pas un nombre pair. Donc : G ne contient pas d'élément de la forme $(2,b)$ où $b\in\mathbb{Z}$

7) On a $(3,2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et $3^2-2\times2^2=9-8=1$ donc : le couple $x=(3,2)$ est un élément de G

8) D'une part, on a $x^0=(1,0)$ et d'autre part, on sait que $x^0=(a_0,b_0)$ (par définition des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$). En identifiant les coordonnées, on a bien :

$$a_0=1\quad\text{ et }\quad b_0=0$$

Soit maintenant $n\in\mathbb{N}$. Par définition de x^{n+1}, on a :

$$x^{n+1}=x^n\star x=(a_n,b_n)\star(3,2)=(3a_n+2\times b_n\times2,2a_n+3b_n)=(3a_n+4b_n,2a_n+3b_n)$$

Par ailleurs, on sait que $x^{n+1}=(a_{n+1},b_{n+1})$ donc, par identification, on a bien les deux égalités annoncées. Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\begin{cases}a_{n+1}=3a_n+4b_n\\b_{n+1}=2a_n+3b_n\end{cases}$$

9) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $a_{n+2}=3a_{n+1}+4b_{n+1}$ (d'après la première relation de récurrence établie). En utilisant la seconde, il vient :

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(2a_n+3b_n)=3a_{n+1}+8a_n+12b_n$$

Or on a $4b_n=a_{n+1}-3a_n$ donc :

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+8a_n+3(a_{n+1}-3a_n)=6a_{n+1}-a_n$$

Finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$$

10) On utilise un raisonnement par récurrence double. ⋆ On sait que $a_0 = 1$ (et $b_0 = 0$) donc, d'après la question 8., on a $a_1 = 3\times 1 + 4\times 0 = 3$. D'autre part, on a :

$$\frac{(3-2\sqrt{2})^0+(3+2\sqrt{2})^0}{2} = 1 = a_0 \quad \text{et} \quad \frac{(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})}{2} = 3 = a_1$$

donc les égalités sont vraies pour $n \in \{0,1\}$. ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que :

$$a_n = \frac{(3-2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^n}{2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{(3-2\sqrt{2})^{n+1}+(3+2\sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

Montrons que $a_{n+2} = \frac{(3-2\sqrt{2})^{n+2}+(3+2\sqrt{2})^{n+2}}{2}$. D'après la question 9., on a :

$$\begin{aligned} a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n &= 6\times \frac{(3-2\sqrt{2})^{n+1}+(3+2\sqrt{2})^{n+1}}{2} - \frac{(3-2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^n}{2} \\ &= \frac{(3-2\sqrt{2})^n(6(3-2\sqrt{2})-1)+(3-2\sqrt{2})^n(6(3+2\sqrt{2})-1)}{2} \\ &= \frac{(3-2\sqrt{2})^n(17-12\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})^n(17+12\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

Or on a $(3\pm 2\sqrt{2})^2 = 17 \pm 12\sqrt{2}$ donc :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{(3-2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^2+(3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})^2}{2} \\ &= \frac{(3-2\sqrt{2})^{n+2}+(3+2\sqrt{2})^{n+2}}{2} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n+2$. Par principe de récurrence double, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(3-2\sqrt{2})^n+(3+2\sqrt{2})^n}{2}$$