# Chapitre 23 : Dimension finie

A) Espaces vectoriels de dimension finie

- Définition par existence d'une fmaille génératrice finie
- Familles libres et génératrices en dim finie
- Une famille libre en dim finie est finie, une famille génératrice admet une sous-famille génératrice
- Existence de base en dimension finie
- Lemme de la base incomplète
- Théorème de la base incomplète
- Théorème de la base extrait

B) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont même cardinal, c'est la dimensiun de l'espace.
- Caractérisation des espaces vectoriels de dimension $0, 1$ et $2$.
- Famille libres et génératrices en dimension finie(2)
- Lien entre le cardinal d'une famille libre, liée, génératrice, base en fonction du cardinal.
- Pour une famille de cardinal dim(E), être libre est équivalent à être générateur, est équivalent à être une base.
- Rang d'une famille de vecteurs
- Invariance du rang d'une famille de vecteurs par "opérations élémentaires" (addition d'un vecteur à un autre, multiplication par un scalaire d'run vecteur, échange de 2 vecteurs, suppression de vecteurs combinaisons linaires d'autres vecteurs de la famille.
- Produit d'espaces vectoriels de dimension finie

  C) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

  - Dimension d'un sous-espace vectoriel
  - Bases adaptées à un sous-espace vectoriel
  - Somme de sous-espaces vectoriels
  - Caractérisation somme directe et supplémentaires en dimension finie
  - Existence d'un supplémentaire en dimension finie
  - Base adaptée à un supplémentaire en dimension finie

# Chapitre 24 : Applications linéaire

A)Généralités

- Définition et premiers exemples classique
- Lien entre application linéaire et morphisme de groupes, conséquences
- Sommé et produit par un scalaire d'applications linéaires
- $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
- Composition d'applications linéaires
- $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau (application à la dérivée k-ème d'une fonction de classe $C^{\infty}$).
- Application linéaire à valeur dans un produit cartésien d'espaces vectoriels (applications composantes linéaires).
- Applications linéaires coordonnées dans une base.
- Isomorphismes, la bijection réciproque d'une application linéaire est une application linéaire.
- Noyau et image d'une application linéaire
- Lien entre injectivité, surjectivité et noyau d'une application linéaire.

B)Endomorphismes particuliers

- Homotéthies, propriétés sur les homotéthies
- Projecteurs et propriétés
- Symétries et propriétés

C) Applications linéaires et familles de vecteurs

- Famille image d'une famille par une application linéaire

- Lien entre être libre/être lié pour la famille $(x_i)_{i\in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est injective.
- Lien entre être générateur pour la famille $(x_i)_{i\in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est surjective.
- Image d'une base par une application linéaire, lien avec injectivité, surjectivité, bijectivité.
- Détermination unique d'une application par l'image d'une base.

D)Applications linéaires et dimension finie

- Injectivité, surjectivité, bijectivité en dimension finie
- Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.
- Isomorphisme de $E$ vers $K^{dim(E)}$ à l'aide des applications coordonnées dans une base.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$
  $f$ injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $f$ bijective $\iff f$ inversible à gauche $\iff f$ inversible à droite.
- Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ lorsque les deux espaces sont de dimension finie.
- Rang d'une application linéaire et propriétés de base sur le rang.
- Théorème du rang (vu Mardi)

E)Applications linéaires et supplémentaires (Vu Mardi).

## Questions de cours :

**Les définitions des 3 derniers chapitres doivent être connues sur le bout des doigts, vous pouvez être interrogés sur chacune de ces définitions**

- Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On prouvera les propositions suivantes :
  **1)** Si $(x_i)_{i\in I}$ est liée, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est liée.
  **2)** Si $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre, alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.
  **3)** Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre et $f$ injective, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est libre.
- Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On prouvera les propositions suivantes :
  **1)** $f\left(\mathrm{vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right) = \mathrm{vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)$.
  **2)** Si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de $E$, alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)$.
  **3)** Si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de $E$, alors $(f(x_i))_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si $f$ est surjective dans $F$.
- (Caractérisation des projecteurs). Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On prouvera que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  **1)** $p$ est un projecteur ;
  **2)** $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ ;
  **3)** $p \circ p = p$ ( $p$ est idempotente).
- (Caractérisation des symétries). Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On prouvera que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  **1)** $s$ est une symétrie ;
  **2)** $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ ;
  **3)** $s \circ s = \mathrm{id}_E$ (s est involutive). $s$ est alors la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, et on a de plus que $s^{-1} = s$.