Chapitre 22 : Espaces vectoriels (1)

A) Premières définitions

- Loi externe
- Définition espace vectoriel, et caractérisation équivalentes
- Espaces vectoriels usuels
- Produit d'espaces vectoriels
- Règles de calcules (pour les neutres et opposés) dans un espace vectoriels
- Combinaison linéaire d'éléments d'un espace vectoriel et stabilité des espaces vectoriels par combinaisons linéaires (finies). Famille presque nulles.

B) Sous-espaces vectoriels

- Définition et caractérisation
- Exemples usuels de Sous-espaces vectoriels.
- Sous espace vectioriel engendré par une partie ou une famille (et opérations sur ces espaces).
- Droite et plans vectoriels.
- Modification d'une famille de vecteurs laissant stable son espace vectoriel engendré.
- Intersection de sous espaces vectoriels.

C) Somme de 2 sous espaces vectoriels.

- définition de $F+G$ comme $(F \cup G)$ et première caractérisation.
- Ecriture des vecteurs de $F+G$ comme somme (pas forcément unique) d'un élément de F et d'un élément de G.
- Sous-espaces vectoriels en somme directe
- Caractérisation de la somme directe par intersection
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires
- Caracatérisation du supplémentaire par écriture comme somme ou par l'intersection
- Exemples

C) Familles libres, génératrices et bases

- Def famille libres génératrices et bases
- Définition familles liées
- Un famille est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres
- sous-famille d'une famille libre, sur-famille d'une famille liée ou génératrice
- Famille augmentée d'un vecteur d'une famille libre
- Toute famille de $p+1 \in \mathbb{N}$ vecteurs engendrée par p vecteurs est liée
- Existence et unicité de la décomposition dans une abse
- Coordonnées dans une base
- Bases canoniques
- Famille de polynômes échelonnés en degré.

Chapitre 23 : Dimension finie

A) Espaces vectoriels de dimension finie

- Définition par existence d'une fmaille génératrice finie
- Familles libres et génératrices en dim finie
- Une famille libre en dim finie est finie, une famille génératrice admet une sous-famille génératrice
- Existence de base en dimension finie
- Lemme de la base incomplète
- Théorème de la base incomplète
- Théorème de la base extrait

B) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont même cardinal, c'est la dimensiun de l'espace.
- Caractérisation des espaces vectoriels de dimension $0, 1$ et 2.

- Famille libres et génératrices en dimension finie(2)
- Lien entre le cardinal d'une famille libre, liée, génératrice, base en fonction du cardinal.
- Pour une famille de cardinal dim(E), être libre est équivalent à être générateur, est équivalent à être une base.
- Rang d'une famille de vecteurs
- Invariance du rang d'une famille de vecteurs par "opérations élémentaires" (addition d'un vecteur à un autre, multiplication par un scalaire d'run vecteur, échange de 2 vecteurs, suppression de vecteurs combinaisons linaires d'autres vecteurs de la famille.
- Produit d'espaces vectoriels de dimension finie

C) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

- Dimension d'un sous-espace vectoriel
- Bases adaptées à un sous-espace vectoriel
- Somme de sous-espaces vectoriels
- Caractérisation somme directe et supplémentaires en dimension finie
- Existence d'un supplémentaire en dimension finie
- Base adaptée à un supplémentaire en dimension finie

Chapitre 24 : Applications linéaire

A)Généralités

- Définition et premiers exemples classique
- Lien entre application linéaire et morphisme de groupes, conséquences
- Sommé et produit par un scalaire d'applications linéaires
- $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.
- Composition d'applications linéaires
- $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau (application à la dérivée k-ème d'une fonction de classe C^∞).
- Application linéaire à valeur dans un produit cartésien d'espaces vectoriels (applications composantes linéaires).
- Applications linéaires coordonnées dans une base.
- Isomorphismes, la bijection réciproque d'une application linéaire est une application linéaire.
- Noyau et image d'une application linéaire
- Lien entre injectivité, surjectivité et noyau d'une application linéaire.

B)Endomorphismes particuliers

- Homotéthies, propriétés sur les homotéthies
- Projecteurs et propriétés
- Symétries et propriétés

C) Applications linéaires et familles de vecteurs

- Famille image d'une famille par une application linéaire
- Lien entre être libre/être lié pour la famille $(x_i)_{i\in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est injective.
- Lien entre être générateur pour la famille $(x_i)_{i\in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est surjective.
- Image d'une base par une application linéaire, lien avec injectivité, surjectivité, bijectivité.
- Détermination unique d'une application par l'image d'une base.

D)Applications linéaires et dimension finie

- Injectivité, surjectivité, bijectivité en dimension finie
- Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.
- Isomorphisme de E vers $K^{dim(E)}$ à l'aide des applications coordonnées dans une base.
- Si $\dim(E)=\dim(F)$ et $f\in\mathcal{L}(E,F)$
  f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.
- Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, f bijective $\Leftrightarrow f$ inversible à gauche $\Leftrightarrow f$ inversible à droite.
- Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ lorsque les deux espaces sont de dimension finie.

- Rang d'une application linéaire et propriétés de base sur le rang.
- Théorème du rang

E) Applications linéaires et supplémentaires F) Formes linéaires et hyperplan

- Définitions formes linéaires, premiers exemples
- Une forme linéaire est surjective ou nulle
- Dual et base dual
- Définition hyperplan
- Si $v \notin H$ hyperplan de E, alors $Vect(v) \oplus H = E$
- Un sous espace vectoriel de E est un hyperplan de E si et seulement si il admet une droite vectorielle comme supplémentaire.
- Dimension d'un hyperplan et équation d'un hyperplan en dimension finie.
- Intersection d'hyperplans

Questions de cours :

- On prouvera les deux théorèmes suivants :
  1) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} f$ dans E, de sorte que $E = S \oplus \operatorname{Ker} f$. Alors la restriction $f_{/S} : S \to \operatorname{Im} f$ est un isomorphisme.
  2) Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors :
  $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f.$$
- On prouvera les résultats suivants :
  a) Soit H un hyperplan de E, $\forall v \in E \backslash H, Vect(v) \oplus H = E$
  b) Soit H sous-espace vectoriel de E. H est un hyperplan de E si et seulement si il admet une droite vectorielle comme supplémentaire.
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $p \leq n$, on prouvera les résultats suivants :
  a) Un hyperplan de E est de dimension $n-1$ (Note : on ne prouvera bien que ce sens de l'implication).
  b) L'intersection de p hyperplans de E est de dimension supérieure à $n-p$
  c) Si $F \subset E$ est de dimension $n-p$ alors F est l'intersection de p hyperplans de E.