Chapitre 26 : Groupe symétrique

- Structure de groupe
- Cardinal du groupe (non prouvé)
- Transpositions
- Commutations
- Ordre d'une permutation
- Points fixes et support
- Orbites
- Définition cycles et premières propriétés
- Décomposition en produit de cycles à support disjoints
- Décomposition en produit de transpositions
- Application au calcul de l'ordre d'une permutation
- Signature d'une permutation.

Chapitre 27 : Déterminants

A)Application n-linéaires

- Définitions, premières propriétés
- Formes n-linéaires
- Formes symétriques, alternées, anti-symétriques
- Propriétés en lien avec les permutations
- Espace vectorile des formes symétriques et anti-symétriques
- En dimension finie, dans un espace de dimension inférieur ou égale à p.

B)Déterminant d'une famille de vecteurs

- Définitions (existence et unicité admise)
- Formules de changement de base
- Lien entre être une abse et être de déterminant nul

C)Déterminant d'un endomorphisme

- Définition (déterminant de l'image d'une base dans cette base) et preuve que la définition ne dépend pas de la base.
- Formules de changement de base
- Lien entre être une base et être de déterminant nul
- Propriétés de calcul
- Déterminant d'une composée, de l'inverse

D)Déterminant d'une matrice carrée

- Définition
- Lien avec les déterminants de vecteurs et les déterminants d'endomorphisme
- Lien avec l'inversibilité de la matrice
- Propriétés de calculs
- Déterminant d'une transposée
- Lien avec colonnes et lignes

Les méthodes de calculs du déterminant de matrices n'ont pas encore été vues.

Questions de cours :

- On prouvera les propriétés suivantes. Soit $n \geqslant 1$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
  1) $\mathrm{Supp}\left(\sigma^{-1}\right) = \mathrm{Supp}(\sigma)$ et $\mathrm{Fix}\left(\sigma^{-1}\right) = \mathrm{Fix}(\sigma)$.
  2) $\mathrm{Supp}(\sigma)$ et $\mathrm{Fix}(\sigma)$ sont σ-invariants : on a que $\sigma(\mathrm{Supp}(\sigma)) = \mathrm{Supp}(\sigma)$ et $\sigma(\mathrm{Fix}(\sigma)) = \mathrm{Fix}(\sigma)$.
  3) Soit $n \geqslant 1$ et soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathfrak{S}_n^2$. Si les supports de σ_1 et σ_2 sont disjoints (i.e. si $\mathrm{Supp}(\sigma_1) \cap \mathrm{Supp}(\sigma_2) = \emptyset$) alors σ_1 et σ_2 commutent.

- On prouvera les propriés suivantes : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{A}_p(E)$.
  1) Pour tout $\left(x_1, \ldots, x_p\right) \in E^p$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a que :
  $$f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \lambda x_j, x_{i+1}, \ldots, x_p\right) = f\left(x_1, \ldots, x_p\right).$$
  2) Si $\left(x_1, \ldots, x_p\right) \in E^p$ est liée, alors $f\left(x_1, \ldots, x_p\right) = 0$.
  3) Si E est de dimension finie et que $\dim E < p$, alors $f = 0$: on a donc que $\mathcal{A}_p(E) = \{0\}$ si $\dim E < p$.
- On prouvera les propriétés suivantes : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$.
  1) f est antisymétrique si et seulement si :
  $$\forall \left(x_1, \ldots, x_p\right) \in E^p, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, f\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right) = \varepsilon(\sigma) f\left(x_1, \ldots, x_p\right)$$
  2) f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.