Chapitre 27 : Déterminants

A)Application n-linéaires

- Définitions, premières propriétés
- Formes n-linéaires
- Formes symétriques, alternées, anti-symétriques
- Propriétés en lien avec les permutations
- Espace vectorile des formes symétriques et anti-symétriques
- En dimension finie, dans un espace de dimension inférieur ou égale à p.

B)Déterminant d'une famille de vecteurs

- Définitions (existence et unicité admise)
- Formules de changement de base
- Lien entre être une abse et être de déterminant nul

C)Déterminant d'un endomorphisme

- Définition (déterminant de l'image d'une base dans cette base) et preuve que la définition ne dépend pas de la base.
- Formules de changement de base
- Lien entre être une base et être de déterminant nul
- Propriétés de calcul
- Déterminant d'une composée, de l'inverse

D)Déterminant d'une matrice carrée

- Définition
- Lien avec les déterminants de vecteurs et les déterminants d'endomorphisme
- Lien avec l'inversibilité de la matrice
- Propriétés de calculs
- Déterminant d'une transposée
- Lien avec colonnes et lignes

E) Méthodes de calcul

- Déterminants en petite dimension
- Propriétés basique du déterminant
- Matrices triangulaires/diagonales
- Pivot de Gauss
- Mineurs, cofacteurs, et développement par rapport à ligne/colonne
- Déterminant de Vandermonde
- Comatrice et formule de la comatrice.

Chapitre 28 : Dénombrement

A) Bases sur le cardinal

- Définition cardinal, unicité de la définition
- Sous-ensembles et cardinal
- Opérations sur les ensembles finis (réunion disjointe, complémentaire, réunion disjointe de plusieurs ensembles, union non disjointe)
- Application entre ensembles finis, injectité, surjectivité, bijectivité, principe des tiroirs

B) Dénombrements classiques et méthodes

- Produit cartésien
- Ensembles d'applications et ensemble des parties
- Arrangements,injections et permutations
- Combinaisons (application vu Mardi sur les propriétés des coefficients binomiaux)
- Methodes de dénombrements additives, multiplicatives, compter la même chose plusieurs fois, etc.

Questions de cours :

- Preuve du calcul du déterminant d'une matrice triangulaire (on remontrera le lemme qui précède ce calcul).
- Calcul du déterminant de Vandermonde
- Calcul du déterminant d'une matrice 4×4 ou supérieur + preuve du théorème d'interpolation de Lagrange en utilisant un déterminant de Vandermonde.
- On prouvera les résultats suivants :
  1) Soit E et F deux ensembles, avec E fini.
  Si f est une injection de E dans F, alors l'ensemble $f(E)$ est fini et card $(f(E)) = \text{card}(E)$.
  2) Soit E et F deux ensembles, avec E fini. Si f est une application de E dans F, alors l'ensemble $f(E)$ est fini et card $(f(E)) \leqslant \text{card}(E)$.
  De plus, on a card $(f(E)) = \text{card}(E)$ si, et seulement si, f est injective.
- On montrera les résultats suivants :
  1) Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n est :
  $$n(n-1)\cdots(n-p+1).$$
  Si $1 \leqslant p \leqslant n$, il est donc égal à $\frac{n!}{(n-p)!}$.
  2) Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est $n(n-1)\cdots(n-p+1)$.
  3) Si card $(E) = \text{card}(F) = n$, le nombre de bijections de E sur F est $n\,!$.