

L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre son résultat dans la suite de l'énoncé.

Les résultats de l'exercice 1 pourront être réutilisés dans les exercices suivants, les autres exercices sont indépendants entre eux.

I Questions préliminaires

Exercice 1

(Divers)

- 1) Soit a, b, c 3 réels avec $a > 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

- 2) En déduire qu'un polynôme de second degré est de signe constant si et seulement si son discriminant est négatif ou nul.
- 3) On rappelle le résultat classique suivant :
Soit f et g 2 fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $f + g$ est dérivable et sa dérivée est $f' + g'$.
Soit maintenant $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $f_1, \dots, f_n$, n fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $(f_1 + \dots + f_n)' = \sum_{k=1}^n f_k'$ est dérivable et que sa dérivée est $(f_1' + \dots + f_n')$.

Exercice 2

Les questions marquées d'un ★ sont plus difficiles mais seront valorisées.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\sum_{k=1}^n k$ et prouver ce résultat sans effectuer de récurrence.
- 2) Énoncer la formule du binôme de Newton.
- 3) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, donner la formule permettant de factoriser $a^n - b^n$.
- 4) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, développer $(a - b)^4$.
- 5) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, factoriser $a^3 + b^3$.
- 6) Que vaut $\binom{7}{4}$?
- 7) Que vaut $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 40$?
- 8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+2}$.
- 9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=2}^n 3^{2k-1}$.
- 10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^{n-k}$.
- 11) Soit $n \in \mathbb{N}$, Réexprimer $\sum_{k=1}^n k^2 + k - 9$ avec le changement d'indice $j = k + 3$ (ne pas faire le calcul ensuite).
- 12) ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$.
- 13) Calculer $\prod_{k=1}^n 2^{k \times k!}$.
- 14) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$.
- 15) ★ Soit $n \in \mathbb{N}, n > 2$, montrer que $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \ln(n) - \ln(1) + \ln(2) - \ln(n+1)$.
- 16) ★ Soit p et n deux entiers naturels. On rappelle le résultat suivant vu en TD :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^n \binom{i+p}{i} = \binom{p+n+1}{n}$$

Montrer que $\sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=1}^n (i+j)\right)$.

II Problèmes

Exercice 3

- 1) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (\sum_{k=1}^n u_k) \geq 0$.

- 2) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^n u_k = 0$. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = 0$.
- 3) Soient n un entier naturel non nul, et $x_1, \dots, x_n$ n nombres réels.
- Justifier que la somme $S = \sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2$ est positive ou nulle.
 - On suppose à présent que les réels $x_1, \dots, x_n$ sont tels que

$$\sum_{k=1}^n x_k = n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$$

Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_k = 1$$

- 4) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \quad (1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2.$$

On pose aussi :

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, B = \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ en fonction de A, B, C et x .
- On suppose que $A = 0$. Montrer (1).
- On suppose maintenant que $A \neq 0$. À l'aide d'une étude de signe de la fonction f , montrer (1).
- Application : démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Exercice 4

Soient n et p deux entiers naturels, avec $n \geq p$. On pose :

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^p$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier quelques propriétés des sommes $S_{n,p}$.

- Dans cette question on étudie le cas $p = 0$.
 - Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $S_{n,0} = 0$.
 - Que vaut $S_{0,0}$?
- Dans cette question on étudie le cas $p = 1$ (et donc $n \geq 1$). On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^k$.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $f(x)$.
 - Montrer que f est dérivable et donner deux expressions différentes de sa dérivée f' .
 - Déduire de la question précédente la valeur de $S_{1,1}$, et celle de $S_{n,1}$ pour tout entier $n > 1$.
- On revient au cas général où n et p sont deux entiers naturels, avec $n \geq p$.
 - Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ (On redémontrera bien le résultat de bout en bout).
 - Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$
 - En déduire que : $S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$
 - Etablir que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n > p, S_{n,p} = 0$.

Exercice 5

Le premier objectif de cet exercice est d'établir la formule ci-dessous :

$$\forall (n, p, q) \in \mathbb{N}^3, \quad \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

1) Soit k un entier naturel quelconque. Que vaut le coefficient binomial $\binom{0}{k}$?

2) Pour tout entier naturel p , on note $P(p)$ l'assertion suivante

$$P(p) : \quad \forall (n, q) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Etablir par récurrence sur p que $P(p)$ est vraie pour tout entier naturel p .

3) Application. Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir que :

$$\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \right]^2 = \binom{2n}{n}.$$