Chapitre 28 : Dénombrement

A) Bases sur le cardinal

- Définition cardinal, unicité de la définition
- Sous-ensembles et cardinal
- Opérations sur les ensembles finis (réunion disjointe, complémentaire, réunion disjointe de plusieurs ensembles, union non disjointe)
- Application entre ensembles finis, injectité, surjectivité, bijectivité, principe des tiroirs

B) Dénombrements classiques et méthodes

- Produit cartésien
- Ensembles d'applications et ensemble des parties
- Arrangements,injections et permutations
- Combinaisons (application vu Mardi sur les propriétés des coefficients binomiaux)
- Methodes de dénombrements additives, multiplicatives, compter la même chose plusieurs fois, etc.

Chapitre 29 : Probabilités sur un univers fini,Variables aléatoires

A) Vocabulaire de base des probabilités

- Univers, évènements
- Evènements élémentaires, incompatibles, certains,impossible
- Système complet d'évènements[2]
- Variables aléatoires sur un univers fini
- Exemples classiques

B) Espaces probabilisés

- Définition probabilité, espace probabilisé
- Premières propriétés
- Additivité fini, somme des probabilités d'un système complet d'évènements.
- Distribution de probabilités, Déterminantion d'une probabilité par les évènements élémentaires
- Exemple fondamental : La probabilité uniforme

C) Loi d'une variablé aléatoire

- Définition
- Lien avec les évènements élémentaires
- Variables aléatoires de mêmes lois (maintenu par la composition)
- Lois usuelles : uniforme, Bernouilli, binomiale

C) Couples de variables aléatoires

- Définition
- Exemples classiques
- Loi conjointe, loi marginale
- Généralisation aux n-uplets/vecteurs aléatoires.

D) Conditionnement

- Probabilité conditonnelle, premières propriétés
- Formule des probabilités composées,totale, de Bayes
- Loi d'une Variable aléatoire conditionnée par un évènement.

Questions de cours :

- Exercice 9 de la feuille de TD 27 :
  Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement avec remise 6 boules de l'urne.

1) Dans un premier cas, les boules blanches sont numérotées de 1 à 5 et les boules noires de 6 à 13 .

1) a) Déterminer le nombre de tirages possibles.

b) Déterminer le nombre de tirages comportant 5 boules noires et une boule blanche.
c) Déterminer le nombre de tirages comportant au plus un boule noire
d) Déterminer le nombre de tirages comportant 3 boules noires et 3 boules blanches.
e) Déterminer le nombre de tirages comportant au moins une boule blanche.

2) Dans un second cas, les boules blanches et les boules noires sont non numérotées et donc indiscernables. Reprendre les questions précédentes.

- On redonnera **Très précisément** la définition d'une probabilité puis on prouvera les propriétés suivantes :

1) Soit A et B deux événements de $(\Omega,\mathbb{P})$. On a :
a) $\mathbb{P}(\varnothing)=0$;
b) $\mathbb{P}(\bar{A})=1-\mathbb{P}(A)$
c) si $A\subset B$, alors $\mathbb{P}(A)\leqslant\mathbb{P}(B)$: on dit que P est croissante ; de plus, $\mathbb{P}(B\backslash A)=\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)$;
d) $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

2) Pour toute famille finie $(A_1,\dots,A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles de $(\Omega,\mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}\left(A_1\cup\cdots\cup A_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_k\right).$$

3) Si $(A_1,\dots,A_n)$ est un système complet d'événements de $(\Omega,\mathbb{P})$, alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right)=1$$

et, plus généralement, pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(B\cap A_i\right).$$

- **1)** Prouver que : soit (X,Y) un couple de variables aléatoires sur $(\Omega,\mathbb{P})$. On a alors :

$$\forall x\in X(\Omega)\quad \mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(\{X=x\}\cap\{Y=y\}).$$

2) On lance deux dés équilibrés succesivement : X est la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y) ainsi que les lois marginales.

- **1)** Prouver la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes $U_1,\cdots,U_n$ tels que pour $i\in[\![1,n]\!]$, l'urne U_i contient i boules blanches et $n-i$ boules noires.
On tire aléatoirement un numéro i entre 1 et n On tire ensuite une boule aléatoirement dans l'urne U_i.
Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

3) Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1% des personnes saines testées. Calculer la probabilité qu'une personne soit réellement malade Iorsqu'elle a un test positif.