

Chapitre 29 : Probabilités sur un univers fini, Variables aléatoires

A) Vocabulaire de base des probabilités

- Univers, évènements
- Evènements élémentaires, incompatibles, certains, impossible
- Système complet d'évènements²
- Variables aléatoires sur un univers fini
- Exemples classiques

B) Espaces probabilisés

- Définition probabilité, espace probabilisé
- Premières propriétés
- Additivité fini, somme des probabilités d'un système complet d'évènements.
- Distribution de probabilités, Détermination d'une probabilité par les évènements élémentaires
- Exemple fondamental : La probabilité uniforme

C) Loi d'une variable aléatoire

- Définition
- Lien avec les évènements élémentaires
- Variables aléatoires de mêmes lois (maintenu par la composition)
- Lois usuelles : uniforme, Bernouilli, binomiale

C) Couples de variables aléatoires

- Définition
- Exemples classiques
- Loi conjointe, loi marginale
- Généralisation aux n-uplets/vecteurs aléatoires.

D) Conditionnement

- Probabilité conditionnelle, premières propriétés
- Formule des probabilités composées, totale, de Bayes
- Loi d'une Variable aléatoire conditionnée par un évènement.

E) Indépendance

- Evènements indépendants, lien avec la probabilité conditionnelle, indépendance des évènements contraires
- indépendance famille d'évènements
- Variables aléatoires indépendantes
- Indépendance via les évènements élémentaires, via les lois conditionnelles
- Fonctions de variables indépendantes
- Indépendance de n variables aléatoires, différence avec indépendant 2 à 2.
- Fonctions de variables indépendantes
- Lemme des coalitions
- Sommes de variables aléatoires de Bernouilli

FIN DU PROGRAMME ALLEGÉ

Chapitre 30 : Espérance et variance

A) Espérance

- Lois usuelles
- Linéarité
- Variable centrée
- Inégalité triangulaire
- Positivité et croissance
- Formule de transfert

- Espérance du produit de Variable aléatoires

B) Variance

- Définition, formule de Koenig-Huygens
- $\text{Var}(aX+b)$, positivité de la variance, signification de variance nulle.
- variance lois usuelles (bernouilli, uniforme, binomiale)
- Ecart-type, variable aléatoire réduite

B) Covariance

- Définition, formule de Koenig-Huygens
- Bilinéarité et positivité
- Variance de la somme de $2/n$ variables aléatoires

Questions de cours :

- On prouvera les propriétés suivantes :
 - 1) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors, pour toutes fonctions f définie sur $X(\Omega)$ et g définie sur $Y(\Omega)$, on a $f(X)g(Y)$.
 - 2) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n -uplet de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, et $1 \leq p < n$. Si f et g sont des fonctions de p variables et $n-p$ variables respectivement telles que $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ soient définies, alors $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes
- - 1) Prouver que : Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors les événements $B_1, \dots, B_n$, où chaque B_i (pour $1 \leq i \leq n$) est A_i ou $\bar{A}_i$, sont également mutuellement indépendants.
 - 2) Pour $A_1, \dots, A_n$ n événements aléatoires indépendants, calculer la probabilité de $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ en fonction de $\mathbb{P}(A_1), \dots, \mathbb{P}(A_n)$.
 - 3) Prouver que deux variables aléatoires X et Y sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et F respectivement sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in E \times F$, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient :

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

FIN DU PROGRAMME ALLEGÉ

- Preuve de la linéarité de l'espérance puis calcul de l'espérance de X où X est la variable aléatoire comptant le nombre de points fixe d'une permutation aléatoire de S_n .
- Preuve de la formule de transfert, Calcul de l'espérance du produit de variables aléatoires et application au cas de variables aléatoires indépendantes.
- Calcul de la variance de la loi uniforme et de la loi binomiale.