TD 28 : Espérances et variances

Calcul espérance/variance

1 Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0,1,\dots,a\}$, où $a\in\mathbb{N}$. On suppose que $E(X)=6$. Déterminer a.

2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[1,n]$. Déterminer l'espérance de $(X-1)^2$ et de $\exp(X)$..

3 On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X=\min(U_1,U_2)$ et $Y=\max(U_1,U_2)$.

1) Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2) Exprimer $X+Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3) Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

4 Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0,1,\dots,N\}$. Démontrer que

$$E(X)=\sum_{n=0}^{N-1}P(X>n).$$

5 Soit $n\geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{B},P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1,2,\dots,n\}$. On considère a un entier de $\{1,2,\dots,n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall\omega\in\Omega, Y(\omega)=\begin{cases}X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega)\leq a\\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega)>a\end{cases}$$

1) Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
2) Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1.
3) Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale ?

6 Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+, n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[1,n]$ telle que :

$$\forall k\in[1,n]\quad P(X=k)=\lambda k.$$

Déterminer $\lambda,\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$. On admettra que $\sum_{k=1}^n k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

7 Soit a et b des entiers tels que $a\leqslant b$. Déterminer la variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, en utilisant la variance de la loi uniforme sur $[1,n]$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

8 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi. Calculer $\mathbb{E}(|X-Y|)$:

1) lorsque $X\sim\mathcal{B}(p)$;
2) lorsque $X\sim\mathcal{U}([1,n])$.

9 Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire toutes les boules successivement sans remise. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le rang de la dernière boule noire tirée. Déterminer la loi de X et son espérance.
Indication : On pourra montrer que, pour $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, on a $\sum_{k=n}^{m+n}\binom{k}{n}=\binom{m+n+1}{n+1}$.

10 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et Σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n, ensemble des permutations de $[1,n]$.

1) Pour $1\leqslant k\leqslant n$, on note L_k la longueur du cycle de Σ auquel appartient k. Montrer que L_k suit la loi uniforme sur $[1,n]$.
2) Pour $k\in[1,n]$, on note N_k le nombre de cycles de Σ de longueur k. Montrer que :

$$N_k=\frac{1}{k}\left(\mathbf{1}_{\{L_1=k\}}+\dots+\mathbf{1}_{\{L_n=k\}}\right).$$

En déduire $\mathbb{E}(N_k)$.
3) Soit N le nombre de cycles de Σ. Déterminer $\mathbb{E}(N)$.

11 Soit X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre $p \in]0,1[$ sur le même espace probabilisé. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer :

1) la loi du couple (U, V) ;

2) la covariance de U et V ;

3) U et V sont-elles indépendantes ? Conclusion ?

12 Soit un entier $n \geqslant 2$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne k, il y a k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et dans celle-ci, on pioche une boule au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la covariance de X et de Y.

13 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(X_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de variables aléatoires centrées, réduites et mutuellement indépendantes sur le même espace probabilisé fini. On considère la matrice M aléatoire d'ordre n dont les coefficients sont les $X_{i,j}$ et l'on pose $D = \det(M)$. Calculer l'espérance et la variance de D.

Inégalités

14 ★ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que $V(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.
Indication. On remarquera que $(X-a)(X-b) \leqslant 0$.

15 On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720 .

16 Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait |que X_n/n approche p.

1) Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?

2) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0, P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

3) En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.