Thomas Masanet

I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Problème n° 1

1) Pour les 3 systèmes, on applique la méthode du pivot de gauss. Pour certains des systèmes, on doit poser des inconnues secondaires
(S1)

$$\begin{cases} x+y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$

$$\begin{cases} x+y+z-3t=1 \\ -y-3z+7t=-3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

On pose z et t comme inconnues secondaires. Le système devient alors :

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=1-z+3t \\ -y=-3+3z-7t \end{cases}$$

On en déduit alors en remontant que $y=3-3z+7t, x=-2+2z-4t$. L'ensemble des solutions est donc :

$$S=\{(-2+2z-4t, 3-3z+7t, z, t)(z,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

(S2)

$$\begin{cases} -5x-4y+3z=-9 \\ 3x+3y-4z=3 \\ -4x-2y-3z=-6 \end{cases}$$

$$(L_2 \leftarrow L_2 + \tfrac{3}{5}L_1)$$
$$(L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{4}{5}L_1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5x-4y+3z=-9 \\ \frac{3}{5}y-\frac{11}{5}z=-\frac{12}{5} \\ \frac{6}{5}y-\frac{27}{5}z=\frac{6}{5} \end{cases}$$

Ici, on peut continuer le pivot normalement, mais on a un possibilité de simplifier les lignes 2 et 3 en supprimant les fractions par opération c

$$(L_2 \leftarrow 5L_2)$$
$$(L_3 \leftarrow 5L_3)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5x-4y+3z=-9 \\ 3y-11z=-12 \\ 6y-27z=6 \end{cases}$$

$$(L_3 \leftarrow L_3 - 2L2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5x-4y+3z=-9 \\ 3y-11z=-12 \\ -5z=30 \end{cases}$$

En remontant on en déduit que le système a une unique solution : $z=-6, y=-26x=19$.
(S3)

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y-z=11 \\ 2x+5y-5z=13 \\ x+4y+z=18 \end{cases}$$

$$(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$
$$(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)$$
$$(L_4 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ y+z=5 \\ 2y+4z=14 \end{cases}$$

$$(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$
$$(L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1)$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ y+2z=7 \\ -2z=-2 \\ 0=0 \end{cases}$$

La dernière équation est une équation de compatibilité vérifiée, on peut la supprimer, on a alors un système triangulaire. En remontant on obtient :

$$x=4, y=3, z=2.$$

2) Petite erreur ici, I n'ayant pas été défini, a est sensé être un point de $\mathbb{R}$.

a) f continue en a : $\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon$.
Négation : $\exists \varepsilon>0, \forall \alpha>0, \exists x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq \alpha$ et $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$.

b) f admet l pour limite en a : $\forall \varepsilon>0, \exists \alpha>0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$.
Négation : $\exists \varepsilon>0, \forall \alpha>0, \exists x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq \alpha$ et $|f(x)-l| \geq \varepsilon$.

c) f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$: $\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow f(x)>M$.
Négation : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geq A$ et $f(x) \leq M$.

d) f admet l pour limite en $-\infty$: $\forall \varepsilon>0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq A \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon$.
Négation :$\exists \varepsilon>0, \forall A \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \leq A$ et $|f(x)-l| \geq \varepsilon$.

3) cf cours.

4) a) Si f est nulle alors f' est également nulle donc on a par exemple $f^{'}(1)=0$ ce qui vérifie la proposition demandée.

b) Posons $y=f(c)$.
La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué entre 0 et c, il existe $a \in]0,c[, f(a)=\frac{y}{2}$ (Remarque : la valeur $\frac{y}{2}$ choisie est arbitraire, il est seulement nécessaire qu'elle soit comprise entre 0 et y).
De même en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre c et $+\infty$, il existe $b \in]c,+\infty[, f(b)=\frac{y}{2}$.
Les a et b ainsi construits vérifient les propriétés demandées.

c) La fonction f est continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) donc d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]a,b[, f^{'}(d)=0$, ce qui conclut.

d) Il y a plusieurs façons de voir que le résultat reste bon dans ce cas là. Une assez astucieuse et de voir que si $f \neq 0$, f prend des valeurs strictement négatives, $-f$ vérifie les hypothèses des questions b et c donc $-f^{'}$ s'annule d'après la question c, donc $f^{'}$ s'annule.

Problème n° 2

1) a) La limite de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ en $+\infty$ est 0, la limite de $X \mapsto e^X$ en 0 est 1. Donc, par composition de limites, la limite de $x \mapsto exp^{-\frac{1}{x}}$ en $+\infty$ est 1. Par produit de limites et somme de limites, on obtient donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

b) On veut déterminer si f admet une asymptote oblique (sa limite en $+\infty$ étant $+\infty$, elle ne peut admettre d'asymptote horizontale).
On obtient assez aisément que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=1$ puis que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-x=\frac{1}{2}$.
f admet donc $x \mapsto x+\frac{1}{2}$ comme asymptote oblique.

2) a) f est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{2}$ et du produit de la fonction continue $x \mapsto x$ et de la composée de fonctions continues $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0, x \neq 0} f(x)=\frac{1}{2}=f(0)$. Donc f est continue en 0.

b) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{2}$ et du produit de la fonction dérivable $x \mapsto x$ et de la composée de fonctions dérivables $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$.
De plus, sur $]0,+\infty[$,on a :

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= 1.e^{-\frac{1}{x}}+x\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= (1+\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

c) On calcule d'abord la limite de $f^{'}$ en 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f^{'}(x) &= \lim_{X \to +\infty} (1+X)exp(-X) \\ &= \lim_{X \to +\infty} exp(-X)+\frac{1}{\frac{exp(X)}{X}} \overset{\text{Par croissance comparées}}{=} 0. \end{aligned}$$

On a donc que f est continue en 0, dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{x\to 0} f^{'}(x) = 0$.
Par théorème de limite de la dérivée, f est dérivable en 0, de dérivée 0.
De plus f étant de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $f^{'}$ étant continue en 0 par théorème de limite de la dérivée, on a donc que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

d) On montre aisément que $\lim_{x\to+\infty} f^{'}(x) = 1$.
Il existe donc un voisinage du type $[A,+\infty[$ avec $A > 0$ tel que $f^{'}$ est bornée sur ce voisinage, soit de valeur absolue inférieur à un certain M_1 sur ce voisinage.
De plus $f^{'}$ est continue (car f est C^1) sur $[0,A]$ et toute fonction contonue sur un segment est bornée, donc $f^{'}$ est de valeur absolue inférieure à un certain M_2 sur $[0,A]$.
On a donc que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f^{'}(x) \leq \max(M_1, M_2) = K$.
Par propriétés du cours (ou inégalité des acroissements finis), $f^{'}$ est donc K-lipschitzienne.

II Problèmes

Problème n° 3

Etude d'une suité récurrente

1) La fonction g définie dans l'énoncé est continue. De plus, comme $\forall x \in [a,b], f(x) \in [a,b]$, on a que $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiares, il existe $c \in [a,b], g(c) = 0$ soit c tel que $f(c) = c$.

2) Pour que $\varphi(x)$ soit bien défini, on a besoin que $\ln(x)$ soit bien défini (donc $x > 0$) puis que $2-\ln(x) \geq 0$ ce qui revient à $x \leq \exp(2)$.
On a donc $\mathscr{D}_\varphi =]0, e^2]$.

3) Pour le domaine de dérivabilité on a presque le même domaine, si ce n'est que la fonction racine n'étant pas dérivable en 0 on doit extraire le cas où $2 - \ln(x) \leq 0$, soit le cas où $x = e^2$.
On a donc $\mathscr{D}^{'}_\varphi =]0, e^2[$.
De plus pour $x \in \mathscr{D}^{'}_\varphi$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi^{'}(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{-x}\frac{1}{\sqrt{2-ln(x)}} \\ &= -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}} \end{aligned}$$

4) a) Soit $x \in [1,e]$,
On a :

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq e &\Longleftrightarrow \text{(Par croissance du logarithme) } 0 \leq \ln(x) \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow 1 \leq 2 - \ln(x) \leq 2 \\ &\Longleftrightarrow 1 \leq \sqrt{2-\ln(x)} \leq \sqrt{2} \\ &\Longleftrightarrow 1 \leq \varphi(x) \leq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Comme $[1,\sqrt{2}] \subset [1,e]$, on a bien que $[1,e]$ est stable par φ.

b) La restriction

$$\varphi|_{[1,e]}$$

est une fonction continue(car dérivable) sur $[1,e]$ et à valeurs dans $[1,e]$. D'après la question 1 cela signifie donc qu'elle admet un point fixe sur cet intervalle.

5) C'est une propriété du cours que si φ laisse stable un intervalle I et que $u_0 \in I$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ (sinon on peut aussi le reprouver par simple récurrence).

a) On étudie la dérivée $\varphi^{'}$ et on montre que, sur $[1,e]$, sa valeur absolue est majoré par $\frac{1}{2}$.
Par le corollaire de l'inégalité des acroissements finis , on a alors que φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\overset{\text{Car } \ell \text{ est un point fixe de } \varphi}{=} |\varphi(u_n) - \varphi(\ell)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - l|. \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant obtenue par la lipschitzianité de φ.

c) Il s'agit d'une simple récurrence exploitant la question précédente.

d) Par encadrement, on obtient que la suite $(|u_n - l|)$ converge vers 0, ce qui implique que u converge vers ℓ.

Problème n° 4

1) **Calcul des puissances de A.**

a) On appplique la méthode de calcul de l'inverse par la méthode du pivot.
On montre que P est inversible car transformable par opérations élémentaire en une matrice triangulaire supérieure aux coefficients diagonaux non nuls puis on termine le calcul de l'inverse et on obtient :
$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Le calcul matriciel montre que $A = PDP^{-1}$. En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient $A = P^{-1}D$.

c) Le calcul des puissance de matrice diagonales est une propriété du cours : Il suffit d'élever les coefficients diagonaux à la puissance de demandée.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

d) Soit $Q(n)$ la propriété "$A^n = PD^nP^{-1}$. On cherche à prouver cette propriété par récurrence Initialisation :
Au rang 0 la propriété s'écrit $A^0 = PD^0P^{-1}$ soit $I_n = PI_nP^{-1}$ ce qui est vrai.
Hérédité :
On suppose la propriétée vraie au rang n, on a :

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= PP^n \\ &\overset{\text{Propriété de récurrence et question } b)}{=} PDP^{-1}PD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
La propriété esr donc vrai à tout rang.

2) **Étude du commutant de A.**

a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} N \in \mathscr{C}(A) &\Leftrightarrow NA = AN \\ &\Leftrightarrow NPDP^{-1} = PDP^{-1}N \\ &\Leftrightarrow \text{(On multiplie par } P^{-1} \text{ à gauche } etP \text{ à droite) } P^{-1}NPD = DP^{-1}NP \\ &\Leftrightarrow P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D) \end{aligned}$$

b) Pour montrer cette égalité entre ensembles, on procède par double inclusion :
($\supset$) Soit $M \in \mathrm{D}_3(\mathbb{R})$. M et D sont deux matrices diagonales, par propriété du cours, elles commutent et leur produit est une matrice diagonale égale de coefficients diagonaux égaux au produit des coefficients diagonaux des 2 matrices.
($\subset$) Soit $M \in \mathscr{C}(D)$. Calculons les coefficients de MD et DM pour montrer que M est nécessairement diagonale :
Soit $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$,

$$\begin{aligned} [DM]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{3} [D]_{i,k}[M]_{k,j} \\ &\overset{\text{Seul le coefficient diagonal de } D \text{ reste.}}{=} D_{i,i}M_{i,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [MD]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{3} [M]_{i,k}[D]_{k,j} \\ &\overset{\text{Seul le coefficient diagonal de } D \text{ reste.}}{=} D_{j,j}M_{i,j} \end{aligned}$$

On a donc que $D_{j,j}M_{i,j} = D_{i,i}M_{j,i}$, soit encore $(D_{j,j} - D_{i,i})M_{i,j} = 0, \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$.
Or pour $i \neq j$, $D_{j,j} \neq D_{i,i}$ donc on doit avoir $M_{i,j} = 0$. La matrice M est donc diagonale.
Par double inclusion, on a donc :
$\mathscr{C}(D) = \mathscr{D}_3(\mathbb{R})$.

c) D'après la question a), on a :
$N \in \mathscr{C}(A) \Longleftrightarrow P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D)$. De plus d'après la question b), $\mathscr{C}(D) = D_3(\mathbb{R}) = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ où $E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}$ sont les matrices élémentaires.
On a donc :

$$\begin{aligned} P^{-1}NP \in \mathscr{C}(D) &\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, P^{-1}NP = \alpha_1 E_{1,1} + \alpha_2 E_{2,2} + \alpha_3 E_{3,3} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, N = \alpha_1 PE_{1,1}P^{-1} + \alpha_2 PE_{2,2}P^{-1} + \alpha_3 PE_{3,3}P^{-1}. \end{aligned}$$

En posant $X_1 = PE_{1,1}P^{-1}$, $X_2 = PE_{2,2}P^{-1}$, $X_3 = PE_{3,3}P^{-1}$, on obtient bient le résultat demandé.

3) a) Par calcul matriciel, on obtient $X_{n+1} = AX_n$

b) On raisonne par récurrence sur n.
Au rang $n = 0$, la proposition s'écrit $Xn = A^0 X_0 = X_0$ donc elle est vraie.
On suppose la propriété vraie au rang n, on a alors :

$$A^{n+1}X_0 = A(A^n X_0) = AX_n = X_{n+1}$$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
Par théorème de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) À l'aide de la question $1d$) on a l'expression de A^n, on a donc

$$\begin{aligned} X_n &= PD^nP^{-1}X_0 \\ &= \begin{pmatrix} -2^n + 2(-1)^n \\ 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$a_n = -2^n + 2(-1)^n, b_n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}, c_n = 2^n + (-1)^{n+1}.$$

Problème n° 5

Partie I : Etude d'une première fonction

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonction dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 revient à montrer que f admet une limite finie en 0. Or

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} \\ &\overset{\text{On reconnaît un taux d'acroissement}}{=} \arctan^{'}(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On peut donc prolonger f par 1 en 0.

a) On revient à l'expression du taux d'acroissement en x et $-x$ et on distingue le cas paire du cas impaire.

b) f est paire comme quotient de 2 fonctions impaires. D'après la question précédente, sa dérivée est donc impaire. Sa valeur en 0, comme pour toute fonction impaire, est donc nécessairement 0.

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a par dérivée d'un quotient que :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}x - \arctan(x).1}{x^2}$$

2) L'idée ici est de voir $\frac{t^2}{(1+t^2)^2}$ comme $\frac{-1}{2}t.\frac{-2t}{(1+t^2)^2}$. On va dériver le membre de gauche et dans le membre de droite on reconnaît une dérivée d'une fonction de la forme $\frac{1}{u}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt &= \left[-\frac{1}{2}t\frac{1}{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-1}{2}\frac{1}{1+t^2}dt \\ &= -\frac{1}{2}x\frac{1}{1+x^2} - 0 - (\frac{-1}{2}[\arctan(t)]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}x\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan(x). \\ &= -\frac{1}{2}x^2 f'(x). \end{aligned}$$

3) De la question précédente, on trouve assez aisément que $f^{'}$ est postive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$ ce qui indique que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
Il ne reste plus qu'à faire le tracé en faisant apparaître la valeur de f en 0 ainsi qu'un "palier" en 0 correspondant à la dérivée nulle.

Partie II : Etude d'une deuxième fonction

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = -\frac{1}{x}\int_0^{-x} f(t)dt$.
On effectue le changement de variable $u = -t$, $du = -dt$. On a :

$$\begin{aligned} g(-x) &= -\frac{1}{x}\int_0^{x} f(-u)(-du). \\ &\overset{\text{Par parité de } f}{=} -\frac{1}{x}(-\int_0^{x} f(u)du) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Donc g est une fonction paire.

2) f converge vers 1 en 0. Donc soit $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0, \forall t \in [0,\alpha], 1-\varepsilon \leq f(t) \leq 1+\varepsilon$.
Par croissance de l'intégrale, sur $[0,\alpha]$, on a donc :

$$\int_0^x 1-\varepsilon dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x 1+\varepsilon dt$$

Soit encore :

$$(1-\varepsilon)x \leq \int_0^x f(t)dt \leq (1+\varepsilon)x$$

D'où :

$$(1-\varepsilon) \leq g(x) \leq (1+\varepsilon).$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient que g converge vers 1 en 0, donc que g ets prolongeable par continuité par 1 en 0.

3) Les fonctions f et g étant paires, on se permet de prouver ceci uniquement sur $\mathbb{R}^+$.
Sur $\mathbb{R}^+$, f est décroissante et plus petite que 1 donc on a :
$\forall t \in [0,x], f(x) \leq (t) \leq 1$
En appliquant l'intégrale et en multipliant par $\frac{1}{x}$, on obtient l'ingalité recherchée.

4) Sur $\mathbb{R}^*$, g est dérivable comme produit de fonctions dérivables (le deuxième terme étant dérivable par le théorème fondamental de l'analyse).
De plus, on a :

$$\begin{aligned} g^{'}(x) &= \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x) \\ &= \frac{1}{x}(f(x) - g(x)) \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $f \geq g$ donc g' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc g décroissante) et positive sur $\mathbb{R}_-^*$ (donc g croissante).

5) f converge vers 0 en ∞ donc en utilisant un raisonnement similaire à la moyenne de Césaro pour les suites (on sépare l'intégrale en 2), on obtient que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = 0$.
De plus, on a pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt$.
Le déuxième membre de cette somme est simplement une constante multipliée par la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, il converge donc également vers 0.
Donc g converge vers 0 en $+\infty$.