Chapitre 30 : Espérance et variance

A) Espérance

- Lois usuelles
- Linéarité
- Variable centrée
- Inégalité triangulaire
- Positivité et croissance
- Formule de transfert
- Espérance du produit de Variable aléatoires

B) Variance

- Définition, formule de Koenig-Huygens
- Var(aX+b), positivité de la variance, signification de variance nulle.
- variance lois usuelles (bernouilli, uniforme, binomiale)
- Ecart-type, variable aléatoire réduite

C) Covariance

- Définition, formule de Koenig-Huygens
- Bilinéarité et positiviyé
- Variance de la somme de 2/n variables aléatoires
- Variables décorrélées, covariance de variables indépendantes

D) Inégalités probabilistes

- Inégalité de Markov
- Inégalité de Bienaymé Chebychev

Chapitre 31 : Intégration

A) Continuité uniforme

- Définition, lien avec la continuité
- Fonctions lipschitziennes
- Théorème de Heine
- Uniforme continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$.

B) Fonctions en escaliers et fonctions continues par morceaux

- Subdivision d'un segment
- subdivisions plus fines, plus grossières
- Définition fonctions en escalier
- Subdivision adaptée à plusieurs fonctions en escalier
- Espace vectoriel et anneau des fonctions en escalier
- Fonctions continues par morceaux
- Bornitude des fonctions continues par morceaux
- Propriétés des fonctions continues par morceaux similaires à celles sur les fonctions en escalier.
- Norme infine d'une fonction continue par morceaux sur un segment et propriétés.

C) Construction de l'intégrale

- Intégrale des fonctions en escalier
- Linéarité, inégalité triangulaire, normalisation, positivité,croissance, lien avec partie réelle et imaginaire,relation de Chasles.
- Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux à l'aide d'une approcimation uniforme.
- Linéarité, inégalité triangulaire, normalisation, positivité,croissance, lien avec partie réelle et imaginaire,relation de Chasles (pour les fonctions continues par morceaux).
- Intégrale "de a à b".

D) Intégrale fonctions de leur bornes

- Continuité de l'intégrale à borne variable pour une fonction continue par morceaux.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Calcul de dérivée de fonctions dont les bornes dépendent de x.
- Lien entre intégrales et primitives
- Intégrale d'une fonction de signe constant.
- Changement de variable/ Intégration par parties
- Invariance par translation et symétrie : calcul des intégrales de fonctions paire, impaires et périodiques.

E) Sommes de Riemann

F) Formules de Taylor global

Taylor reste intégral

Inégalité de Taylor-Lagrange

Intérêt des différentes formules de Taylor.

Questions de cours :

POUR TOUS LES ETUDIANTS : Les étudiants doivent tous être capable de redonner sans erreurs : 1)Les formules de Taylor, 2) La formule liée aux sommes de Riemann.

- On redonnera la formule de la variance d'un n-uplet de variables aléatoires en fonctions de leurs variances et co-variance respectives puis :
  1) Donner la variance de la variable comptant le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire de $S_n (n \geq 2)$.
  2) Montrer l'inégalité de Markov
  3) Montrer l'inégalité de Bienaymé Chebychev.
- 1) Montrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
  2) Redonner le théorème de Heine
  3) Montrer que la fonction racine est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
  4) Donner un exemple de fonction continue mais non uniformément continue (Remarque : L'exemple du cours n'a pas été prouvé et on ne demande pas de le prouver ici mais ceci pourra faire l'objet d'un exercice guidé par le colleur)
- On redonne la définition suivante :
  Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et soit $f \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{K})$. Soit $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a;b]$ adaptée à f, et soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que f soit constante égale à λ_i sur $]x_i;x_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![0;n-1]\!]$. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ par rapport à la subdivision σ le nombre complexe :
  $$I_{a,b,\sigma}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$
  1) Prouver que :
     Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et soit $f \in \mathcal{E}([a;b],\mathbb{K})$. Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a;b]$ adaptées à f, alors $I_{a,b,\sigma}(f) = I_{a,b,\sigma'}(f)$.
  2) À quoi sont égales les quantités dont on a montré l'égalité dans la question précédente ?
  3) Montrer la linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier.
- Soit a un réel strictement positif et $f \in \mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$. Montrer (en faisant bien le passage par les fonctions en escaliers) que :
  1) Si la fonction f est paire, alors :
  $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x.$$
  2) Si la fonction f est impaire, alors :
  $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$