TD 2 : Logique et raisonnement

♡ = Exercice thématique, ★ = Niveau de difficulté, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Logique et prédicats

1 Préciser, avec des justifications, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1) La négation de " f est une fonction paire" est " f est une fonction impaire".
2) Lorsque la proposition (P et Q) est vraie, la proposition (P ou Q) est vraie.
3) La négation de ($P \Rightarrow Q$) est ($P \Rightarrow$ non Q).
4) Paris est en France ou Madrid est en Chine.
5) Lorsque P est fausse et ($P \Rightarrow Q$) est vraie alors Q est également fausse.
6) Si l'homme est un quadrupède alors il aboie.

2 Donner la négation des propositions suivantes :

1) S'il pleut, je prends mon parapluie.
2) Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.
3) L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
4) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq y$.
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

3 Compléter les assertions suivantes avec $\Rightarrow, \Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1) $x^2 \geq 9 \ldots x \geq 3$.
2) $x = 1 \ldots x^2 - 1 = 0$.
3) $x > 2 \ldots x \geq 3$.
4) f croissante… f str croissante.
5) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \ldots (u_n)$ est une suite constante.
6) $x = 2 \ldots x^2 - 4x + 4 = 0$.

2

4 (d'après J. D. Hamkins). On considère le prédicat $A(x, y)$: « x aime y ». À l'aide de ce prédicat et de quantificateurs, exprimer les propositions suivantes :

1) "Tout le monde aime quelqu'un"
2) "Tout le monde est aimé"
3) "Tout le monde est aimé par quelqu'un qui l'aime"
4) "Quelqu'un n'aime personne"
5) "Quelqu'un aime tout le monde"
6) "Tout le monde aime quelqu'un qui l'aime en retour"

5 On considère une rame de métro circulant sur le réseau d'une certaine grande ville. Soit le prédicat $O(p, s)$: " la porte p de la rame s'ouvre à la station s ". À l'aide de ce prédicat et de quantificateurs, exprimer les propositions suivantes :

1) " Chaque porte s'ouvre à chaque station "
2) "Certaines portes s'ouvrent à chaque station"
3) " Certaines portes ne s'ouvrent pas à certaines stations "
4) "Une porte ne s'ouvre à aucune station "
5) " À certaines stations, toutes les portes ne s'ouvrent pas "
6) " À certaines stations, aucune porte ne s'ouvre "

6 Les paires de propositions suivantes sont-elles équivalentes ?

1) $A : \forall x \in X, \exists y \in X, P(x, y)$, et $B : \exists y \in X, \forall x \in X, P(x, y)$;
2) $A : \forall x \in X, \exists y \in X, P(x, y)$, et $B : \forall y \in X, \exists x \in X, P(y, x)$;
3) $A : \forall x \in X, \exists y \in X, P(x, y)$, et $B : \forall y \in X, \exists x \in X, P(x, y)$;
4) $A : \forall x \in X, (P_1(x)$ et $P_2(x))$, et $B : (\forall x \in X, P_1(x))$ et $(\forall x \in X, P_2(x))$;
5) $A : \forall x \in X, (P_1(x)$ ou $P_2(x))$, et $B : (\forall x \in X, P_1(x))$ ou $(\forall x \in X, P_2(x))$;
6) $A : \exists x \in X, (P_1(x)$ et $P_2(x))$, et $B : (\exists x \in X, P_1(x))$ et $(\exists x \in X, P_2(x))$;
7) $A : \exists x \in X, (P_1(x)$ ou $P_2(x))$, et $B : (\exists x \in X, P_1(x))$ ou $(\exists x \in X, P_2(x))$;
8) $A : \forall x \in X, (P(x) \Rightarrow Q)$, et $B : (\exists x \in X, P(x)) \Rightarrow Q$.

7 (d'après J. D. Hamkins). On considère une rame de métro circulant sur le réseau d'une certaine grande ville. Soit le prédicat $B(x,y)$: « le passager x bouscule le passager y ». Faire correspondre chaque proposition avec la phrase qui lui correspond le mieux :

1) Chaos indescriptible, ou rame presque vide ?
2) Un touriste semble bloquer la seule porte ouverte.
3) Rien qu'une excuse ne puisse arranger.
4) Quelqu'un de très maladroit a oublié son sac.
5) Souffrance partagée.
6) Impolitesse partagée.

(a) $\exists x, \exists y, B(x,y)$.
(b) $\exists x, \forall y, B(x,y)$.
(c) $\forall x, \exists y, B(x,y)$.
(d) $\forall x, \forall y, B(x,y)$.
(e) $\exists y, \forall x, B(x,y)$.
(f) $\forall y, \exists x, B(x,y)$.

8 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Le démontrer dans chaque cas. Déterminer également la négation logique de chacune de ces propositions.

1) $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, a \leqslant \sin(x) \leqslant b$;
2) $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, e^x = y$;
3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant x$;
4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \geqslant x$;
5) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

9 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Que signifient les phrases quantifiées suivantes

1) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.
2) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant M$.
3) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0 \Longrightarrow f(x) \geqslant 0$.
4) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.
5) $\exists A \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant A \Longrightarrow f(x) = C$.

Modes de raisonnement

10 Soient (u_n) une suite de nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs chacune des propositions suivantes.

1) La suite (u_n) est majorée par 4 .
2) La suite (u_n) est majorée.
3) La suite (u_n) n'est pas majorée.
4) La suite (u_n) est bornée.
5) La suite (u_n) est croissante.
6) La suite (u_n) est constante.
7) La fonction f est la fonction nulle.
8) La fonction f s'annule.
9) La fonction f est croissante.
10) La fonction f admet un maximum.
11) La fontion f ne prend pas deux fois la même valeur.

10

1) Montrer que tout nombre rationnel peut s'écrire comme somme de deux nombres irrationnels.
2) Montrer que, pour tout entier naturel, il existe un nombre premier qui lui est strictement supérieur.
3) À quelle condition un réel peut-il s'écrire à la fois comme la somme et le produit des deux mêmes réels ?

11 Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par récurrence par $f_0 = 1, f_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 0, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Montrer que : $\forall n \geqslant 0, f_n \geqslant n$.

12 (Exemples fondamentaux de raisonnement par l'absurde)

1) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2) Montrer qu'il y a une infinité de nombre entiers.

13 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$$

14 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q+1)$. On pourra utiliser une récurrence forte

15 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x = \sqrt{2x+35}$

16

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Établir l'implication

$$(\forall \varepsilon \geqslant 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow a = 0.$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Établir l'implication

$$(\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow a = 0.$$

3) Soit x et y deux réels. Établir l'équivalence

$$x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$$

17

1) Vérifier que $x^2 + x + 1$ est strictement positif quelle que soit la valeur du réel x.
2) Vérifier que lorsque n est un entier naturel, le nombre $\frac{n(n^2+1)}{2}$ lest aussi.
3) Vérifier que lorsque le produit de deux réels est nul, l'un des facteurs est nul.

18 Exercice 24. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 4$.
2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

19

1) À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, f(m+n) = f(m) + f(n)$$

On pourra commencer par déterminer $f(0)$ et on exprimera f en fonction de $a = f(1)$.

2) À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$