Corrigé DS n°8

L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, il vous est demandé de souligner les résultats obtenus À LA RÈGLE ! Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé.Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties.

I Questions préliminaires

Problème n° 1

1) Cours.

2) Pour réussir ce calcul, il faut calculer les puissances successives de 5, jusqu'à en trouver une qui soit congru à 1 modulo 11 Ainsi :

$$\begin{aligned}
5^1 &\equiv 5[11]\\
5^2 &\equiv 3[11]\\
5^3 &\equiv 4[11]\\
5^4 &\equiv 9[11]\\
5^5 &\equiv 1[11].
\end{aligned}$$

On a donc que $5^2024 = (5^5)^404.(5^4) \equiv 9[11]$.
Le reste de la division euclidienne de 5^2024 par 11 est donc 9.

3) C'est une généralisation de la relation de Chasles qu'on va prouver par récurrence :
Pour $n \geq 2$,on pose $P(n)$ la proposition :
" Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}, \forall f : [a,b] \to \mathbb{R}, \forall a = i_1 < i_2 < \dots i_n = b, \int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{i_k}^{i_{k+1}} f(t)dt$".
Au rang $n = 2$, cette proposition est la relation de Chasles (qui est donc vraie).
On suppose la proposition vraie au rang n, Soit $[a,b] \in \mathbb{R}, f : [a,b] \to \mathbb{R}, a = i_1 < i_2 < \dots i_{n+1} = b$.
Par la relation de Chasles, on a que :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^i {}_n f(t)dt + \int_i^b {}_n f(t)dt.$$

Or, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\int_a^i {}_n f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{i_k}^{i_{k+1}} f(t)dt$$

En rassemblant les 2 égalités précédentes, on obtient :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{i_k}^{i_{k+1}} f(t)dt.$$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
Par le théorème de récurrence, la proposition est donc vraie pour tout $n \geq 2$.

4) Cours.

5) a) Par composition de fonctions de classe$\mathbb{C}^2$, φ est deux fois dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et on a pour $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$\varphi'(x) = \frac{-2}{1+2x}$$
et
$$\varphi''(x) = \frac{4}{(1+2x)^2}.$$

La dérivée seconde de φ est positive donc par propriété, φ est convexe.

b) Posons $\lambda = \frac{1}{2}$.
Par convexité de Φ, on a que pour tout $(x, y) \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \leq \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

En remplaçant φ et λ par leurs expressions, on obtient :

$$\frac{1}{2}\ln(1+2x) + \frac{1}{2}\ln(1+2y) \leq \ln(1+2(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}).$$

En appliquant la fonction exponentielle à cette inégalite (ce qu'on peut faire car l'exponentielle ets une fonction croissante, on obtient alors l'expression voulue, à savoir :

$$\sqrt{(1+2x)(1+2y)} \leqslant 1+x+y.$$

6) sin est 2 fois dérivable sur $[0, \frac{pi}{2}]$ de dérivée seconde $-sin$ négative sur $[0, \frac{pi}{2}]$.
Par propriété, la fonction sin est donc concave sur $[0, \frac{pi}{2}]$.
La courbe de la fonction sin sur cet intervalle est donc en dessous de ses tangentes et au dessus de ses cordes.
En particulier, elle est en dessous de sa tangente en 0 (d'équation $y = x$) et elle est au dessus de la corde qu'elle forme entre 0 et $\frac{pi}{2}$ (d'équation $y = \frac{2}{\pi}x$).
On en déduit l'inéquation demandée.

7) a) Supposons d'abord que f admette un minimum local en a et considérons $c > a$. Puisque a est un minimum local de f, il existe $b \in]a, c[$ tel que $f(b) \geq f(a)$. Mais alors, par l'inégalité des pentes, on sait que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0.$$

On en déduit que $f(c) \geq f(a)$. Le raisonnement aurait été similaire si on avait supposé $c < a$. On a donc bien prouvé que a est un minimum global de f.

b) Supposons maintenant que f admette un maximum local en a et considérons $b < a < c$ tels que pour tout $x \in [b, c], f(x) \leq f(a)$. Considérons ensuite $x_1, x_2 \in [b, c]$ avec $x_1 \leq a \leq x_2$. Par l'inégalité des pentes à nouveau, on a

$$0 \geq \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a} \geq \frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1} \geq 0.$$

On en déduit que $f(x_1) = f(x_2) = f(a)$, puis que f est constante sur $[b, c]$.

Problème n° 2

1) Les diviseurs positifs de 6 sont $1, 2, 3$ et 6 donc $\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12$.
(Remarque : si on ne prend pas le 6 en lui même dans la liste des diviseurs, on tombe sur 6. 6 est ce qu'on appelle un nombre parfait. Le prochain nombre parfait est 28.)
De même, 7 est divisible par 1 et 7 donc $\sigma(7) = 7+1 = 8$.

2) Soit $n \geq 2$ un entier et D l'ensemble de ses diviseurs. on a que n et 1 sont diviseurs de n donc dans D (avec $n \neq 1$ car $n \geq 2$). Donc $\sigma(n) = \sum_{d \in D} d \geq n+1$.
Si l'égalité précédente est une égalité, c'est équivalent à ce qu'on ait pas d'autre diviseurs positifs de n que 1 et $n+1$ ce qui est le cas si et seulement si n est premier.

3) a) On peut énumérer les diviseurs de $n = pq$ en passant par la décomposition en facteurs premiers, ce sont :

$$p^0q^0 = 1, p^0q^1 = q, p^1q^0 = p, p^1q^1 = pq = n.$$

On a donc $\sigma(pq) = 1+p+q+pq = (1+p)(1+q) = \sigma(p)\sigma(q)$, la dernière égalité étant obtenue en utilisant la question précédente.

b) cette proposition est fausse. Prenons par exemple $n = 2$ et $m = 4$. On a que $\sigma(2) = 2+1 = 3$, $\sigma(4) = 1+2+4 = 7$ et $\sigma(8) = 1+2+4+8 = 16 \neq 7*3$.
On a donc trouvé un contre-exemple à la proposition qui est donc fausse.

II Problèmes

Problème n° 3

Une inégalité de convexité

Partie 1 : sommes et intégrales

1) On utilise ici la question 3 de l'exercice 1. On Pose $i_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a que :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \mathrm{S}_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{i_k}^{i_{k+1}} f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} F(i_{k+1}) - F_{i_k}) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

2) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, la fonction F est dérivable sur $]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}[$, continue sur $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis :
$\exists\ c_{n,k} \in]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}[, \mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{\mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = f\left(c_{n,k}\right).$
En multipliant par $\frac{1}{n}$ l'équation précédente, on obtient le résultat voulu.

3) Par les 2 questions précédentes, on a que :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \mathrm{S}_n(f)\right| &= |\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{F}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \mathrm{F}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)|\\ &= |\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(c_{n,k}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)|\\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |f\left(c_{n,k}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)|.\end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue à l'aide de l'inégalité triangulaire.

4) a) La question n'était pas résolvable avec ce programme, il s'agit du théorème de Heine.

b) On utilise que $n \geq 1 + \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \alpha$.
Or $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $|c_{n,k} - \frac{k}{n}| \leq |\frac{k+1}{n}| \leq \frac{1}{n} \leq \alpha$.
On conclut en utilisant la question a).

c) D'après la question 3, on a :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \mathrm{S}_n(f)\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(c_{n,k}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

d) La question précédente nous donne exactement, par la définition de la limite que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$.

Partie 2 : Convexité

1) Voir cours.

2) La fonction exponentielle est une fonction convexe. Par la formule de Jensen appliquée aux points $(x_0, ..., x_{n-1})$ avec $\forall k \in [\![0, n-1]\!], x_k = \frac{k}{n}$., on obtient l'inégalité demandée.

3) Si f est continue, alors c'est également le cas de $\exp(f)$. D'après la partie 1 de cet exercice, on a donc que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(f\left(\frac{k}{n}\right.\right.$
$\int_0^1 e^{f(t)}dt$.
De plus, par composition de limite, on a que $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(S_n(f)\right) = \exp(\int_0^1 f(t)dt)$.
En passant à la limite dans l'expression de la question précédente, on obtient donc bien $\exp\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 e^{f(t)}\mathrm{d}t$.
par passage à la limité

4) Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente à la fonction $t \mapsto \ln(f)(t)$ qui par hypothèse sur f est bien définie et continue sur $[0, 1]$.

Problème n° 4

1) a) Les entier 2 et 5 sont premiers entre eux donc on peut trouver par l'algorithme d'Euclide une relation de Bézout entre 2 et 5, à savoir, $(a,b) \in \mathbb{Z}^2, 2a+5b=1$.
En particulier, $a=-2$ et $b=1$ fonctionnent.
On a donc $2(2024a)+5(2024b)=2024$, soit $2.(-4048)+5(2024)=2024$.
On pose donc $x_0=-4048$ et $y_0=2024$ qui sont bien solutions de l'équation demandée.

b) On raisonne par double implication : ($\Rightarrow$) Si $\exists k \in \mathbb{Z}, x=x_0+5k, y_0=y-2k$, on a :

$$2x+5y=2x_0+10k+5y_0-10k=2x_0+5y_0=2024.$$

D'où l'implication directe. () Réciproquement :
Pour $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$\begin{gathered} 2x+5y=2024 \\ \Rightarrow \\ 2x+5y=2x_0+5y_0 \\ \Rightarrow \\ 2(x-x_0)=5(y_0-y) \end{gathered}$$

On a donc que $2|5(y_0-y)$ et comme 2 et 5 sont premiers entre eux, on a par le lemme de Gauss que $2|(y_0-y)$.
Donc il existe $k \in \mathbb{Z}, (y_0-y)=2k$ ou encore $y=y_0-2k$.
On a alors que $2(x-x_0)=5(2k)$ donc en divisant par 2 des deux côtés, on obtient $x=x_0+5k$.
On a donc bien qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x=x_0+5k$ et $y=y_0-2k$.
On conclut par double implication.

c) Pour regarder les solutions dans $\mathbb{N}^2$, on impose que x et y soit positifs ce qui va donner une condition sur les valeurs de k possible dans la question précédente.
On cherche donc l'ensemble des $k \in \mathbb{Z}, x_0+5k \geq 0$ et $y_0-2k \geq 0$.
Les deux conditions donnent $k \geq 809.6$ et $k \leq 1012$ soit si on se limite aux valeurs entières de k : $k \in [\![810, 1012]\!]$.
Il y a donc $1012-810+1=203$ couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$, tels que $2x+5y=2024$.

2) a) On montre aisément que l'unique couple $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $ax+by=n$ est $(0,0)$. Donc $D_0=1$.

b) Si a^b ne divise pas n, il n'y a pas de solutions donc $D_n=0$. En effet, si $ax+by=n, (x,y)\mathbb{N}^2, a^b|a, a^b|bdonca^b|ax+by=n$, ce qui est faux par hypothèse.

3) a) Par le théorème de Bézout, il existe des coefficients $(x_1,y_1) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ax_1+by_1=1$. En posant $x_0=nx_1$ et $y_0=ny_1$ on a bien que $ax_0+by_0=n$.

b) Par le même raisonnement qu'en $1b$), l'ensemble des (x,y) solution de l'équation sont les $x=x_0+bk, y=y_0-ak$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4) a) Même raisonnement qu'en question 1c) $x \geq 0$ et $y \geq 0$ imposent des conditions sur k qui sont celles demandées dans l'énoncé.

b) Être un entier k vérifiant $-\frac{y_0}{a} \leqslant k \leqslant \frac{x_0}{b}$ est équivalent à avoir $k \in [\![\lceil -\frac{y_0}{a} \rceil, \lfloor \frac{x_0}{b} \rfloor]\!]$.
On a donc $D_n = |[\![\lceil -\frac{y_0}{a} \rceil, \lfloor \frac{x_0}{b} \rfloor]\!]| = \lfloor \frac{x_0}{b} \rfloor + \lfloor \frac{y_0}{a} \rfloor + 1$.

c) Dans cet exercice, on pose donc $a=2$, $b=5$ et $n=1777$ et on nous demande D_n. Un couple (x_0,y_0) vérifiant $ax_0+5y_0=n$ est le couple $(x_0,y_0)=(-3554,1777)$. On a donc $D_n=\lceil \frac{-3554}{5} \rceil + \lceil \frac{1777}{2} \rceil + 1 = 178$.

Problème n° 5

1) a) On raisonne par récurrence sur n.
Au rang 0, la propriété s'écrit :
" $1^2-0.1=(-1)^0$", ce qui est vrai.
On suppose la propriété vraie au rang n, on a alors :

$$\begin{aligned} un+2^2-u_{n+1}u_{n+3} &= un+2^2-u_{n+1}(u_{n+1}+u_{n+2}) \\ &= un+2^2-u_{n+1}^2-u_{n+2}u_{n+1} \\ &\text{Hypothèse de récurrence} un+2^2-(u_nu_{n+2}+(-1)^n)-u_{n+2}u_{n+1} \\ &= un+2^2-un+2(u_n+u_{n+1})+(-1)^{n+1} \\ &= un+2^2-un+2^2+(-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

La proposition est donc vrai au rang $n+1$.
Par théorème de récurrence, la proposition est donc vérifiée.

b) La proposition précédente nous montre que pour soit $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}, u_{n+1}a_n + u_n b_n = 1$ avec $a_n = (-1)^n un + 1$ et $b_n = (-1)^{n+1}u_{n+2}$.
u_n et u_{n+1} vérifient donc une relation de Bézout, donc ils sont premiers entre eux.

2) a) On raisonne par récurrence double sur p.
Au rang $p = 0$ et $p = 1$, on a :
"$u_n = u_{n-1}.0 + u_n.1$" et $u_{n+1} = un - 1.1 + u_n.1$ qui sont vraies, la première trivialement, et la deuxième par définition récursive de la suite de Fibonacci.
On suppose la propriété vraie au rang p et $p+1$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+p+2} &= u_{n+p+1} + u_{n+p}\\
&= u_{n-1}u_{p+1} + u_n u_{p+2} + u_{n-1}u_p + u_n u_{p+1}\\
&= u_{n-1}(u_{p+1} + u_p) + u_n(u_{p+2} + u_{p+1})\\
&= u_{n-1}u_{p+2} + u_n up + 3
\end{aligned}$$

La proposition est donc vraie au rang $p+2$.
Par théorème de récurrence double, la proposition est vérifiée.

b) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on va montrer l'égalité demandé par "double divisibilité" : Soit $d_1 = u_n \wedge u_{n+p}$ et $d_2 = u_n \wedge u_p$.
D'après l'équation précédente d_1 divise u_n et u_{n+p} donc il divise $un - 1u_p$. Or u_n et u_{n-1} sont premiers entre eux d'après la question 1b) donc $d_1|u_p$. Comme il divise également u_n il divise d_2.
Réciproquement d_2 divise u_p et u_n donc il divise $u_{n-1}u_p + u_n u_{p+1} = u_{n+p}$. Comme il divise également u_n, il divise d_1.
On a donc bien $d_1 = d_2$.

c) Il s'agit de faire une récurrence en utilisant la question précédente.

3) A faire.

4) a) i) On calcule les 9 premier termes de la suite et $u_8 = 21$ est le premier terme divisible par 7.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 3, $u_{8n}^{u} = u_{pgcd(8,n)}$. Comme 7 divise déjà u_8, on a alors :

$$\begin{aligned}
7|u_n &\Leftrightarrow 7|u_{8n}^{u}\\
&\Leftrightarrow 7|u_{pgcd(8,n)}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat escompté.

iii) Soit $n \in \mathbb{N}$,on raisonne par double implication :
($\Leftarrow$) Si n est un multiple de 8, pgcd$(n,8) = 8$ donc $7|u_{pgcd(8,n)}$ donc d'après la question précédente, $7|u_n$.
($\Rightarrow$) Le pgcd de n et 8 est compris entre 1 et 8. Si il est strictement inférieur à 8, alors $u_{pgcd(8,n)} \in \{u_1, \cdots u_7\}$ donc d'après la question $4i$), $7|u_{pgcd(8,n)}$, ce qui est absurde par hypothèse. Donc pgcd $(8, n) = 8$. Donc $8|n$.

b) Le premier terme divisible par 4 est u_6. Par le même raisonnement que dans les question précédentes, $4|u_n$ si et seulement si $6|n$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, 4 et 7 étant premiers entre eux, on a que $28|u_n \Leftrightarrow (4|u_n)$ et $(7|u_n.)$
En utilisant les question précédentes, on a donc que

$$\begin{aligned}
28|u_n &\Leftrightarrow 6|n \text{ et } 8|n\\
&\Leftrightarrow 6 \wedge 8|n\\
&\Leftrightarrow 24 \wedge n.
\end{aligned}$$

Les termes u_n divisibles par 28 sont donc ceux pour lesquels $n|24$.

<u>Problème n° 6</u>

Introduction à la fonction zéta de Riemann

Partie 1 : Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)_{n\geqslant 1}$

1) Par décroissance de $f : x \longmapsto \frac{1}{x^p}$ on a : $\forall x \in [k, k+1], f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$ d'où, par positivité de l'intégrale, $\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dx$ ce qui s'écrit encore $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}dx \leqslant \frac{1}{k^p}$

2) En sommant les inégalités précédentes pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et appliquant la relation de Chasles, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}$ Par changement d'indice $k := k-1$ dans la première somme, on tire : $S_n(p) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^p} \leqslant S_{n-1}(p)$.

3) • Si $p \geqslant 2$, alors $\int_1^A \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^A$, qui a pour limite $\frac{1}{p-1}$ lorsque A tend vers l'infini :

- si $p=1$, alors $\int_1^A \frac{dx}{x^p} = [\ln x]_1^A$, a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

On conclut que $\int_1^x \frac{1}{t^p}dt$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $p \geqslant 2$.

4) Pour p fixé, la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement croissante. Or, d'après la question 2 ,

- Si $p \geqslant 2$, alors $\forall n \geqslant 1, S_n(p) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} \leqslant 1 + \frac{1}{p-1}$ donc la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}^-}$est majorée ;
- Si $p=1$, alors $\forall n \geqslant 1, S_n(p) \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(p) = +\infty$.

Conclusion : la suite $(S_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ssi $p \geqslant 2$.
On note alors $\zeta(p) = \lim_{n\to+\infty} S_n(p)$.

Partie 2 : Calcul de $\zeta(2)$

1) Préliminaires

a) Pour la première question, il faut faire la récurrence en utilisant le fait que le degré d'un produit de polynôme est la somme des degré des polynômes et que de même le coefficient directeur d'un produit de polynôme est le produit des coefficient directeurs de ces polynômes.

b) La fonction cotan est bien définit et dérivable sur $]0,\pi[$ comme le quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,\pi[$.
De plus sa dérivée $x \mapsto \frac{-1}{sin^2}$ est strictement négative sur l'intervalle considéré donc cotan est strictement décroissante sur cette intervalle donc injective.

c) Soit $x \in]0,\pi[$:

$$\begin{aligned}\text{cotan}(\pi - x) &= \frac{\cos(\pi-x)}{\sin(\pi-x)} \\ &= \frac{-cos(x)}{\sin(x)} \\ &= -\text{cotan}(x).\end{aligned}$$

2) a) Les termes de degré $2n+1$ de P_n s'annulent. En regroupant les termes de degré $2n$ de P_n, on obtient $(2n+1)X^{2n}$. Ainsi le degré de P_n vaut $2n$

b) En utilisant la formule du binôme, on obtient : $P_n = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n+1}\left(i^k - (-i)^k\right)\binom{2n+1}{k}X^{2n+1-k}\right)$ Or dans cette somme, les termes pour k pair sont nuls : il ne reste que les termes avec k impair. On a alors :

$$P_n = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}X^{2n-2p}$$

c) Il suffit de reprendre la première expression de P_n évaluée en i et en $-i$:

$$P_n(i) = \frac{1}{2i}(2i)^{n+1} \qquad \neq 0$$
$$P_n(-i) = \frac{-1}{2i}(-2i)^{n+1} \qquad \neq 0$$

d) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$. z est un zéro de P_n sssi $(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$ ssi $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1$. Or $\frac{z+i}{z-i}$ ne peut pas être égal à 1 car $z+i \neq z-i$. Ainsi :

$$P_n(z) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in [\![1,2n]\!] \left| \frac{z+i}{z-i} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right) \Longleftrightarrow \exists k \in [\![1,2n]\!] \right| z = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

Or la fonction cotan est injective sur $]0,\pi[$ et lorsque k décrit $[\![1,2n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n+1}$ reste dans $]0,\pi[$. Ainsi les racines précédentes sont au nombre de $2n$. Comme P_n est de degré $2n$, on a trouvé toutes ses racines et elles sont simples. Ainsi les zéros de P_n sont les cotan $\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in [\![1,2n]\!]$.

e) À la question précédente, on a trouvé $2n$ racines du polynôme de degré $2n$ P_n donc on connaît le coefficient dominant $2n+1$. On peut donc factoriser P_n de la manière suivante :

$$P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

f) On va utiliser l'expression précédente en regroupant certains des facteurs grâce à la formule $\operatorname{cotan}(\pi - x) = -\operatorname{cotan}(x)$:

$$P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\left(X - \operatorname{cotan}\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)\right)$$

$$\text{D'où } P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \quad (R_2)$$

g) Le coefficient en X^{2n-2} dans la relation (R_1) est $-\binom{2n+1}{3} = -\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$. Le coefficient en X^{2n-2} dans la relation (R_2) est $-(2n+1)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Par unicité de ce coefficient, on a : $\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$

h) Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$. Ainsi : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = n + \sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ i.e. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$

3) (a) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a : $\forall t \in [0,x] \cos(t) \leqslant 1 \leqslant 1 + \tan^2(t)$ Ainsi, en intégrant entre 0 et x, on obtient : $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$

(b) Si $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\frac{k\pi}{2n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 \leqslant \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Comme ces termes sont strictement positifs, on en déduit l'inégalité des inverses :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

(c) En sommant ces inégalités, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\frac{n(2n-1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$$

La somme est encadrée par deux suites convergeant vers $\frac{\pi^2}{6}$, donc par convergence par encadrement, la suite $(S_n(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$