TD 1 : Sommes et produits

$\heartsuit$ = Exercice thématique, $\bigstar$ = Niveau de difficulté, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Sommes simples

1 $\heartsuit$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$.Ecrire ces sommes sous forme classique puis calculer les :

1) $A_n = 1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n\times(n+1)$
2) $B_n = 1\times n + 2\times(n-1) + \cdots + n\times 1$.
3) $C_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2$
4) $D_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

2 $\heartsuit$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer la somme S_n des n premiers entiers impairs.

3 Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

où $n\in\mathbb{N}^*$ est strictement croissante.

4 $\heartsuit\bigstar$Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=3}^{n-1} q^k$ où $n\geq 3$ et $q\in\mathbb{K}$
2) $\sum_{k=1}^{100}(2a^{3k+1}+2)$ où $a\in\mathbb{K}$
3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ où $n\in\mathbb{N}$
4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.
5) $\sum_{k=0}^{n} k\times k!$ où $n\in\mathbb{N}$.
6) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ où $n\in\mathbb{N}^*$
7) $\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$ où $n\in\mathbb{N}^*$
8) $\sum_{k=0}^{n} kq^k$ où $q\in\mathbb{K}$ et $n\in\mathbb{N}$
9) $\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$ où $n\in\mathbb{N}$
10) $S=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$ où $n\in\mathbb{N}^*$. On pourra calculer $S+\sum_{k=1}^{n}k^2$.
11) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$ où $n\in\mathbb{N}^*$.
12) $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ où $n\in\mathbb{N}$.
13) $\sum_{k=0}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ où $n\in\mathbb{N}^*$. On pourra effectuer un renversement de la somme.
14) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

5 $\heartsuit\bigstar$ Pour $a\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$, on note $S_a(n)=\sum_{k=1}^{n}k^a$.

1) En considérant $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$, démontrer que $S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$.
2) Utiliser la même méthode pour déterminer $S_2(n)$ puis $S_3(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

6 $\heartsuit\bigstar$ Soit $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_k=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1) Déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_k=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n}u_k$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

7 $\bigstar$ Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que 3 divise 2^n+1 si et seulement si n est impair.

Sommes doubles

8 $\heartsuit\bigstar$ Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1) $\sum_{1\leq i,j\leq n} i$
2) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i$
3) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i+j)$
4) $\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2$
5) $\sum_{1\leq i<j\leq n} ij$
6) $\sum_{1\leq i,j\leq n}|i-j|$
7) $\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l+1}^{n}\frac{l}{k}$
8) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$

9 Soient (n, m) $\in(\mathbb{N}^*)^2$, calculer $S=\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}\begin{pmatrix} n\\ p\end{pmatrix}k^p$.

10
Soit $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres réels. Soit n et m deux entiers naturels. Intervertir les sommes doubles suivantes :

1) $S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$;
2) $S_2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}$;
3) $S_3 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{m} a_{i,j}$ où on a supposé $n \le m$.

11

Calculer
$\sum_{1\le i,j\le n} ij$ en l'exprimant sous la forme d'un produit de sommes simples.

Produits et factoriels

12 ♡ Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de nombres factoriels les produits suivants :

1) $2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)$
2) $1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)$.
3) $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

13 ♡ Simplifier les expressions suivantes :

1) $\frac{(2n+3)!}{(2n-1)!}$;
2) $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$;
3) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}$;
4) $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

14 ★ Calculer les produits suivants :

1) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
2) $\prod_{k=1}^{n} q^k$ avec $q \in \mathbb{K}$
3) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

15 ♡★★

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(n+k)$ à l'aide de $n!$ et $(2n)!$.
2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \prod_{1\leqslant k\leqslant n}(4k-2) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n}(n+k)$. En déduire $\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(4k-2)$.
3) Retrouver cette expression par un calcul direct.

16 ★★ Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right).$$

1) Calculer P_n lorsque $a = 1$.
2) On suppose $a \neq 1$.Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-a)P_n = (1-a^{2^{n+1}})$.
3) En déduire la valeur de P_n.

17 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n = \prod_{1\le i<j\le n} ij$.

18 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$$

Coefficients binomiaux

19 ♡

1) Développer $(x+1)^6, (x-1)^6$.
2) Calculer $\sum_{p=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} 2^p = 3^n$
3) Démontrer que, pour tout entier n , on a $\sum_{k=1}^{2n} \begin{pmatrix} 2n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k 2^{k-1} = 0$.

20 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double :

$$S_n = \sum_{0\le i,j\le n} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$$

21 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{K}$, calculer $(1+x)^{2n}$ de deux manières.
2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$.

22 ♡ Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $A_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire la valeur des sommes A_n et B_n.

23 ★★ Soient n, p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer que

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

24 ♡★★

1) Soient n, p et q des entiers naturels, en utilisant la formule d'additivité et un télescopage, calculer la somme

$$\sum_{k=p+1}^{q} \binom{n+k}{k}$$

2) En déduire $\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p} (i+j)$.